**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**
**НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ**

# XXIX НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

**Национален кръг**
**Бургас, 9 май 2026 г.**
**Възрастова група 11-12 клас, първи тур**

## Решения

**Задача 1. Двойни звезди.** Когато се наблюдава двойна звездна система, при която двете компоненти могат да се различат поотделно, едната компонента, която тук ще означим като А, се приема за неподвижна и се нанасят видимите положения на другата компонента В относно компонентата А. Чрез многократни такива наблюдения в продължителен интервал от време може да се построи относителната орбита на компонентата В спрямо компонентата А. Това, което се получава обаче, е проекцията на тази орбита върху равнина, перпендикулярна на зрителния лъч от земния наблюдател към двойната система. Ще наричаме тази равнина картинна плоскост.

Дадени са ви проекциите на относителните орбити на две двойни звезди, получени от наблюдения – Порима от съзвездието Дева (γ Vir) на Фиг. 1 и HIP 85565 от съзвездието Змия на Фиг. 2.

**А)** Звездата Порима (γ Vir) е с паралакс 85,58 mas (milliarcseconds – хилядни от дъговата секунда). Орбиталният период на двойната система е 169,4 години. Приемете, че орбиталната равнина на двете звезди е перпендикулярна на зрителния лъч, т.е. лежи в картинната плоскост. Компонентата А е отбелязана с кръстче. Определете голямата полуос на относителната орбита в астрономически единици и сумата от масите на двете звезди в слънчеви маси. **[6т.]**

**Б)** Звездата HIP 85565 е с паралакс 19,96 mas. Орбиталният период на системата е 94 години. Тук наистина трябва да имате предвид, че виждате проекцията на относителната орбита върху картинната плоскост, в която положението на компонентата А е означено със звездичка. Определете приблизително ексцентрицитета на истинската относителна орбита, голямата полуос в астрономически единици и наклона на истинската относителна орбита към картинната плоскост. Намерете също и сумата от масите на двете компоненти в слънчеви маси. **[8т.]**

**Решение:**

А) Измерваме мащаба на двете оси и получаваме, че 4″, отчетени по скалите на изображението на Фиг. 1, отговарят на 91 mm. Измерваме голямата ос на относителната орбита и тя се оказва равна на 145 mm. Видимият ъглов размер на голямата полуос на относителната орбита ще бъде:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{4''}{91\ \mathrm{mm}} \cdot 145\ \mathrm{mm} \approx 3'',187$$

Паралаксът на звездата е $p = 0'',08558$. Това означава, че линейна отсечка с дължина 1 астрономическа единица при тази двойна система ще се вижда от земния наблюдател под ъгъл, равен на паралакса. Следователно можем да намерим голямата полуос на орбитата в астрономически единици:

$$a = \frac{\alpha''}{p''} \approx 37{,}24 \text{ au}$$

За да намерим сумата от масите на двете компоненти $M_A + M_B$ в слънчеви маси, ако изразим голямата полуос в астрономически единици, а орбиталния период в години, можем да напишем третия закон на Кеплер в следния вид:

$$M_A + M_B = \frac{a^3}{T^2}$$

Заместваме стойностите и получаваме:

$$M_A + M_B \approx 1{,}8 \text{ слънчеви маси}$$

*Този резултат се различава значително от действителната стойност (която е приблизително 2,86 слънчеви маси), тъй като тук не беше отчетен наклонът на орбиталната равнина на двойната система към картинната плоскост, който е 30°, нито ориентацията на осите на елиптичната орбита спрямо посоката на наклона. За пресмятанията ние използвахме проекцията на действителната голяма полуос на орбитата. Проекцията е по-малка от истинската голяма полуос. Така ние подценихме и сумата от масите на компонентите. Следователно полученият от нас резултат при неизвестен наклон на орбитата може да се счита само за минимална долна граница на сумата от масите на звездите.*

Б) Чрез измервания се убеждаваме, че положението на компонентата А, отбелязано със звездичка, лежи почти точно върху малката ос на симетрия на проектираната относителна орбита, но е отместено спрямо центъра на тази малка ос. Това означава, че малката ос на истинската относителна орбита е перпендикулярна на зрителния лъч от земния наблюдател и представлява голямата ос на проектираната елипса. Спрямо картинната плоскост истинската относителна орбита е завъртяна на определен ъгъл $i$ около ос, съвпадаща с малката ос на истинската елипса. Малката ос на проектираната елипса е проекция на голямата ос на истинската относителна орбита. Крайщата на малката ос на проектираната елипса са проекции на перицентъра и апоцентъра на истинската относителна орбита. Измерването показва, че дължината на малката ос на проектираната елипса е 19 mm, а разстоянията от звездата А до нейните крайни точки са 7 mm и 12 mm. При проекцията върху плоскост съотношенията между дължините на отсечките се запазват. Следователно за разстоянията $r_p$ и $r_a$ от звездата В до звездата А в перицентъра и в апоцентъра на истинската орбита и нейната голяма полуос $a$ можем да напишем:

$$\frac{r_p}{r_a} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{r_a}{a} = \frac{12}{19/2} \approx 1{,}263$$

Оттук можем да намерим ексцентрицитета $e$ на истинската орбита:

$$\frac{r_a}{a} = \frac{a(1+e)}{a} = 1 + e$$

$$e \approx \frac{r_a}{a} - 1 = 0{,}263$$

Ексцентрицитетът на истинската орбита може да се представи и така:

$$e = \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

където $f$ е фокусното разстояние на елипсата, а $b$ е нейната малка полуос. Оттук получаваме:

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Измерванията на Фиг. 2 показват, че по осите на диаграмата 1,2 дъгови секунди отговарят на 103,5 mm, а голямата ос на проектираната елипса е с дължина 97 mm. Следователно видимият ъглов размер на голямата полуос на елипсата е:

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}2''}{103{,}5\ \mathrm{mm}} \cdot 97\ \mathrm{mm} \approx 0{,}562''$$

Паралаксът на двойната звезда е $p$ = 0,01996″. Малката полуос на действителната елипса в астрономически единици ще бъде:

$$b = \frac{\beta}{p} \approx 28{,}16\ \mathrm{au}$$

Оттук по изведената от нас по-горе формула намираме голямата полуос в астрономически единици:

$$a \approx 29{,}18\ \mathrm{au}$$

Като знаем орбиталния период $T$ на системата в години от третия закон на Кеплер можем да пресметнем сумата от масите на двете компоненти:

$$M_A + M_B = \frac{a^3}{T^2}$$

$$M_A + M_B \approx 2{,}81\ \text{слънчеви маси}$$

*Получената оценка е близка до цитирания в астрономическата литература резултат, който е 2,7 слънчеви маси.*

От ъгловия мащаб на изображението, който определихме, можем да пресметнем видимия ъглов размер на проекцията на голямата полуос на относителната орбита:

$$\alpha' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}2''}{103{,}5\ \mathrm{mm}} \cdot 19\ \mathrm{mm} \approx 0{,}110''$$

Ако голямата полуос на истинската относителна орбита беше перпендикулярна на зрителния лъч от земния наблюдател, нейната видима ъглова дължина можем да намерим, като умножим дължината ѝ в астрономически единици по паралакса в дъгови секунди:

$$\alpha = a(\text{в астр. единици}).\, p \approx 0{,}582''$$

За ъгъла $i$, на който е наклонена равнината на истинската относителна орбита към картинната плоскост, можем да напишем:

$$\cos i = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$i \approx 79^\circ$$

*Критерии за оценяване (общо 14 т.):*

*А) 6 т.*

*За измервания, определяне на ъгловия мащаб и намиране на голямата полуос на орбитата – 4 т.*

*За определяне на сумата от масите на звездите – 2 т.*

*Б) 8 т.*

*За правилни разсъждения относно ориентацията на истинската орбита спрямо картинната плоскост – 1 т.*

*За определяне на ексцентрицитета – 2 т.*

*За определяне на голямата полуос на истинската орбита – 2 т.*

*За определяне на сумата от масите на двете звезди – 1 т.*

*За намиране на наклона на орбитата – 2 т.*

**Задача 2. Молекулярен облак.** Нека да разгледаме голям молекулярен облак на разстояние 320 pc от нас, заемащ 0,48 квадратни градуса по небето. Приемете, че облакът е сферичен, хомогенен с концентрация 500 частици/$cm^3$ и е съставен от 80% $H_2$ и 20% He (масови части). Броят частици включва молекулите на водорода и атомите на хелия.

**А)** Пресметнете масата на облака. Каква е необходимата температура, за да започне свиване на облака?

Константата на Болцман е $k_B$ = 1,38.$10^{-23}$ J/K. Масата на протона е $m_P$ = 1,67.$10^{-27}$ kg. **[4т.]**

В процеса на бавно свиване облакът претърпява фрагментация и отделните фрагменти колапсират, образувайки протозвезди. Когато младите звездни обекти стъпят на Главната последователност, считаме, че се раждат като звезди в звезден куп. Много от звездните купове се разпръскват сравнително бързо, но нека да предположим, че звездният куп, образуван от облака, който разглеждаме, ще бъде стабилен поне в следващите 70 милиона години. Нека да предположим, че за това време купът е загубил 70% от масата на първоначалния облак.

**Б)** Назовете 3 типа променливи звезди, които бихме очаквали да наблюдаваме в този обект в тези следващи 70 милиона години. Не изброявайте повече от 3 типа. **[2т.]**

**В)** Оценете интегралната звездна величина на звездния куп след 70 милиона години, както и звездната величина на най-ярката възможна непроменлива звезда в него, ако разстоянието до Земята не се е променило значително и поглъщането е пренебрежимо. За сравнение, Плеядите (интегрална звездна величина 1,5 mag) имат маса $800M_{\odot}$, възраст 100 милиона години и са на разстояние 136 pc. **[4т.]**

**Г)** Какъв е теоретично максималният възможен размер на този звезден куп след 70 милиона години (приливният му диаметър)? Приемете, че разстоянието му до центъра на Галактиката също не се е променило значително и е равно на сегашното разстояние до центъра на Галактиката, което е 8200 pc. **[4т.]**

**Решение:**

**А)** Пресмятаме ъгловия размер на облака

$$\frac{\pi\delta^2}{4} = 0{,}48°$$

$$\delta = 0{,}78°$$

Пресмятаме радиуса на облака

$$R = \frac{\delta r}{2} = 2{,}18 \text{ pc}$$

Атомната маса на $H_2$ е $A_1 = 2$. Атомната маса на хелия е $A_2 = 4$. Средната атомна маса в облака е $A = 0{,}8A_1 + 0{,}2A_2 = 2{,}4$. Моларната маса е средно $\mu = 2{,}4$ g/mol = $2{,}4.10^{-3}$ kg/mol, а средната маса на частица в облака е $m_0 = Am_p = 3{,}98.10^{-27}$ kg. Ако концентрацията на облака е $c = 500$ cm$^{-3}$, то плътността на облака е

$$\rho = cm_0 = 1{,}99.\,10^{-18} \text{ kg/m}^3$$

Пресмятаме масата на облака

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 2{,}54.\,10^{33} \text{kg} = 1275 M_\odot$$

Според теоремата за вириала, за кинетичната и гравитационната потенциална енергии в гравитационно-стабилна система важи:

$$E_K = -1/2 E_P$$

Ако приемем, че кинетичната енергия е породена единствено от топлинното движение на частиците, то тя е:

$$E_K = \left(\frac{3}{2}k_B T\right) N = \left(\frac{3}{2}k_B T\right)\left(\frac{M}{m_0}\right)$$

Гравитационната потенциална енергия на сферичен хомогенен облак с маса $M$ е:

$$E_P = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Заместваме и получаваме

$$\left(\frac{3}{2}k_B T\right)\left(\frac{M}{m_0}\right) = \frac{3GM^2}{10R}$$

$$T = \frac{GMm_0}{5k_B R}$$

или

$$T = \frac{4\pi G R^2 m_0 \rho}{15 k_B}$$

Заместваме и получаваме $T = 145$ K.

**[4т.]**

**Б)** Възможни отговори са:

- Млади звездни обекти: T Tauri, Herbig Ae/Be звезди, FU Ori и др.
- Цефеиди (еволюиращи свръхгиганти)
- Полуправилни променливи звезди (напр. Бетелгейзе)
- Свръхнови (зачита се)

- LBV (ярки сини променливи) и Wolf-Rayet звезди – макар и с много малка вероятност

**[2т.]**

**В)** При възраст на купа $t_{MS}$ най-масивните звезди на Главната последователност са с маса $M_{MAX}$:

$$t_{MS} = \left(\frac{M_{MAX}}{M_\odot}\right)^{-2,5} 10000 \text{ Myr}$$

За възраст $t_{MS}$ = 70 Myr получаваме $M_{MAX} = 7{,}3M_\odot$. Това означава, че всички свръхнови вече са избухнали, най-масивните и горещи звезди на Главната последователност са от спектрален клас B (около B2-3) и е възможно купът да съдържа малък брой червени гиганти със сходна светимост, тъй като еволюционните трекове на масивните звезди в началото са хоризонтални. За звезда на ГП с маса $7{,}3M_\odot$ можем да направим следните оценки: светимост $L \approx 7{,}3^{3,5}L_\odot \approx 1050L_\odot$ и абсолютна звездна величина 4,8 – 2,5lg(1050) ≈ –2,8 mag. На разстояние $r$ = 320 pc видимата ѝ звездна величина е приблизително

$$V = -3{,}6 + 5\lg(r) - 5 = 4{,}7 \text{ mag}$$

Ако купът е запазил 30% от масата на първоначалния облак, то масата му е $M_C = 0{,}3M = 380M_\odot$. Тъй като в слънчеви единици $M/L$ >> 1 за маломасивните звезди и $M/L$ << 1 за масивните, светимостта на този куп ще зависи главно от малкото на брой масивни звезди. Можем да допуснем, че отношението $M/L$ ще бъде малко ниско от това на Плеядите, които са малко по-възрастни и с по-малък процент сини звезди. Масата на купа, който разглеждаме, е около 2 пъти по-малка от тази на Плеядите, така че нека да допуснем, че светимостта му е приблизително равна на тази на Плеядите. Тогава видимата звездна величина ще бъде приблизително

$$V = 1{,}5 + 5\lg\left(\frac{320}{136}\right) = 3{,}4$$

И двете оценки са груби и независими, поради което са с точност около 1 mag.

**[4т.]**

**Г)** Теоретично максималният възможен размер на звезден куп е $2R_T$, където $R_T$ е неговият приливен радиус. Известно е, че кръговата скорост в голяма част от Галактиката, вкл. близо до нас, където е този куп, е $v$ = 220 km/s, откъдето следва за масата на Галактиката, заключена в радиус $r$ от центъра ѝ, че

$$M_G(r) = \frac{v^2 r_{GC}}{G}$$

Можем да напишем условие за приливния радиус на купа, сравнявайки разликата ускоренията $a_0$ и $a_1$, които Галактиката оказва на центъра и на края на купа, с $a_C$, с което купът влияе на обектите в края си и отчитайки центробежните сили:

$$a_0 - a_1 + \omega^2(r_{GC} + R_T) - \omega^2 r_{GC} = a_C$$

$$\frac{GM_{G0}}{r_{GC}^2} - \frac{GM_{G1}}{(r_{GC} + R_T)^2} + \frac{v^2}{r_{GC}^2}(r_{GC} + R_T) - \frac{v^2}{r_{GC}^2} r_{GC} = \frac{GM_C}{R_T^2}$$

$$\frac{v^2 r_{GC}}{G r_{GC}^2} - \frac{v^2(r_{GC} + R_T)}{G(r_{GC} + R_T)^2} + \frac{v^2}{G}\left(\frac{r_{GC} + R_T}{r_{GC}^2} - \frac{1}{r_{GC}}\right) = \frac{M_C}{R_T^2}$$

$$\frac{v^2}{GM_C}\left(\frac{1}{r_{GC}} - \frac{1}{(r_{GC} + R_T)}\right) + \frac{v^2}{GM_C}\left(\frac{R_T}{r_{GC}^2}\right) = \frac{1}{R_T^2}$$

Приемеме, че $R_T << r_{GC}$

$$\frac{v^2}{GM_C}\left(\frac{2R_T}{r_{GC}^2}\right) = \frac{1}{R_T^2}$$

$$R_T = \left(\frac{GM_C r_{GC}^2}{2v^2}\right)^{1/3} = 10{,}5 \text{ pc}$$

Или максималният възможен размер е 21 pc. В действителност, това изчисление отчита приливните сили от симетричен модел на разпределение на плътността на Галактиката, но поради приливни сили от по-близките обекти, максималният възможен размер е по-малък. **[4т.]**

*<u>Критерии за оценяване (общо 14т.):</u>*

*А) 4т.: 1,5т. за масата + 2,5т. за температурата*

*За решение с кръгова скорост (без коеф. 3/5) се дава пълен брой точки.*

*За решение с втора космическа скорост се отнемат 0,5 точки.*

*Б) 2т.: 1 верен тип: 0 т., 2 верни типа: 1т., 3 верни типа: 2т.*

*В) 4т.: за интегралната зв. величина 2т. + за най-ярката звезда 2т.;*

*Г) 4т.: за пресмятане на приливния диаметър. При директна употреба на формула за материални точки (грешка с фактор $(3/2)^{1/3}$) се дават 2/4.*

**Задача 3. Астероид.** Нека Земята се движи по кръгова орбита с радиус равен на една астрономическа единица. Наблюдател се намира на северната тропична окръжност и в деня на зимното слънцестоене, в полунощ, наблюдава в зенита астероид с диаметър 20 km с ъглова скорост равна на 136,5 дъгови секунди в час. Видимото му движение е точно в посока запад. Астероидът се движи в посока перпендикулярна на зрителния лъч и се намира на разстояние 0,33 au. В момента на наблюдението е точно в опозиция.

**А)** Къде относно Земята и Слънцето ще се намира астероидът след половин звездна година? **[8т.]**

**Б)** Възможно ли е след половин звездна година астероидът да се наблюдава в зенита и в каква посока ще се движи той за наблюдател на същата тропична окръжност? По кое време на денонощието ще е най-удобен за наблюдение? Какво ще бъде разстоянието до него и каква ще е видимата му ъглова скорост? **[4т.]**

**В)** Нека наблюдателят разполага с телескоп с адаптивна оптика, която позволява да наблюдава с разделителна способност 0,1″ както през нощта, така и при наблюдения на Слънцето. Нека фотометричната апаратура позволява да се измерват разлики от 0,001 от звездната величина. Дали е възможно в някакъв момент от време от наблюдения с този телескоп да се определи положението и скоростта на астероида? **[2т.]**

**Справочни данни:**

Астрономическа единица: $149{,}6 \times 10^6$ km    Радиус на Земята: 6370 km
Наклон на екватора към еклиптиката: 23°26′
Период на въртене на Земята около оста ѝ: 23 h 56 min 4 s
Период на обикаляне на Земята около Слънцето – 365,25636 d
Маса на Слънцето – $1{,}989 \times 10^{30}$ kg
Гравитационна константа – $6{,}6743 \times 10^{-11}$ N.m$^2$.kg$^{-2}$

**Решение:**

Щом наблюдателят се намира на северната тропична окръжност, то в полунощ, в деня на зимното слънцестоене, той ще се намира в равнината на еклиптиката. (Тук не отчитаме гравитационното влияние на Луната, чието положение ние не знаем, както и точният момент на зимното слънцестоене, за който не разполагаме с информация.)

Щом астероидът се вижда в зенита за наблюдателя на северната тропична окръжност, то и той се намира в равнината на еклиптиката. Видимото му движение е точно в посока запад откъдето следва, че и орбитата на астероида лежи изцяло в равнината на еклиптиката. Понеже се движи перпендикулярно на лъча на зрение, то астероидът се намира в перихелия или в афелия на своята орбита. Трябва да определим голямата полуос на орбитата на астероида. Това ще направим от уравнението на пълната механична енергия, като преди това ще пресметнем неговата пространствена скорост относно Слънцето.

Движението на астероида е ретроградно. Следователно неговата пространствена скорост е по-малка от скоростта на движение на наблюдателя в пространството. Пространствената скорост на наблюдателя е векторна сума от скоростта на Земята по нейната орбита и от скоростта на наблюдателя около центъра на Земята. В момента на наблюдение наблюдателят се движи в посока изток със скоростта на движение на точка от северната полярна окръжност около земната ос. Скоростите са успоредни и еднопосочни. Следователно скоростта на движение на наблюдателя е алгебрична сума от големините на двете скорости.

Понеже астероидът се движи перпендикулярно на зрителния лъч, то неговата пространствена скорост е успоредна на пространствената скорост на наблюдателя. Тогава видимата ъглова скорост на астероида е равна на разликата в пространствените скорости на наблюдателя и астероида, разделена на разстоянието до астероида.

Скоростта на наблюдателя е:

$$v_{obs} = v_{rev} + v_{eq} \cdot \cos\varepsilon = \sqrt{\frac{GM_S}{r_E}} + \frac{2\pi R_E}{T_{rot}} \cdot \cos\varepsilon = 30{,}214\ km/s$$

Където:

$v_{rev}$ – линейна скорост на движение на Земята около Слънцето
$v_{eq}$ – линейна скорост на въртене на точка от екватора на Земята
$r_E$ – радиус на земната орбита (приемаме, че е равна на 1 au)
$R_E$ – среден радиус на Земята
$T_{rot}$ – период на завъртане на Земята около своята ос

$\varepsilon$ – географска ширина на северната тропична окръжност, равна на наклона на равнината на екватора на Земята към равнината на еклиптиката.

Линейната скорост на астероида относно наблюдателя е равна на:

$$\Delta v_{ast} = \omega_{ast} \cdot \Delta r_{ast} = 9{,}075\ km/s$$

Където:

$\omega_{ast} = 136{,}5\, arcsec/h\ = 1.838252 \cdot 10^{-7}\, rad/s$ – е видимата ъглова скорост на астероида относно наблюдателя.

$\Delta r_{ast} = 0{,}33\ au = 49{,}368 \cdot 10^{6}\ km$ – разстоянието от наблюдателя до астероида (тук приемаме, че радиусът на Земята е пренебрежимо малък в сравнение с разстоянията до Слънцето и до астероида).

Пространствената скорост на астероида, в момента на наблюдението, е:

$$v_{ast} = v_{obs} - \Delta v_{ast} = 21{,}139\ \ km/s$$

За определяне на голямата полуос на орбитата на астероида ще използваме формулата за пълната механична енергия на тяло движещо се по елиптична орбита:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_S}{r} = -\frac{GM_S}{2a}$$

Където $v$ е скоростта на разстояние $r$ от Слънцето, а $a$ е голямата полуос на орбитата. Записваме уравнението за голямата полуос $a$ :

$$a = \frac{GM_S}{2}\left(\frac{1}{\frac{GM_S}{r} - \frac{v^2}{2}}\right) = 1{,}496 \cdot 10^{8}\ km\ = 1\ au$$

Където:

$a$ – е голямата полуос на орбитата на астероида.

$v$ – е скоростта $v_{ast} = 21{,}139\ \ km/s$ на астероида в момента на наблюдението.

$r = r_{ast} = 1{,}33\ au$ – е разстоянието от астероида до Слънцето.

Щом голямата полуос е равна на 1 *au*, а астероидът е на по-голямо разстояние от Слънцето, то ние го наблюдаваме в афелия на неговата орбита. Периодът на астероида трябва да е равен на периода на движение на Земята по нейната орбита. Следователно след половин звездна година, в деня на лятното слънцестоене, астероидът ще се намира в перихелия на орбитата си, точно от противоположната страна на Слънцето. Но и Земята ще се намира от противоположната страна на орбитата. Астероидът ще бъде разположен на линията Земя – Слънце.

За наблюдател на северната тропична окръжност астероидът ще преминава през зенита в местно слънчево пладне и ще се вижда на фона на слънчевия диск. Ще се наблюдава пасаж на астероида по диска на Слънцето. Астероидът отново ще се движи точно на запад, но този път защото неговата скорост в перихелия на орбитата му ще бъде по-голяма от орбиталната скорост на Земята.

Разстоянието на астероида от Слънцето ще бъде 0,67 *au*, а разстоянието от Земята – отново 0,33 *au*. Скоростта на астероида в перихелия може също да бъде пресметната от уравнението за пълната механична енергия, но най-лесно е да я определим като използваме втория закон на Кеплер във вида:

$$v_{aph} \cdot r_{aph} = v_{per} \cdot r_{per}$$

Откъдето следва:

$$v_{per} = v_{aph} \cdot \frac{r_{aph}}{r_{per}} = 41{,}962\ km/s$$

Където:

$v_{per}$ – е скоростта на астероида в перихелия на неговата орбита

$r_{per}$ – е разстоянието на астероида от Слънцето в перихелия на неговата орбита

$v_{aph}$ – е скоростта на астероида в афелия на неговата орбита

$r_{aph}$ – е разстоянието на астероида от Слънцето в афелия на неговата орбита

В тази конфигурация скоростта на наблюдателя е разлика в скоростите на Земята и на точка от северната тропична окръжност, понеже в подслънчевата точка те се движат в противоположни посоки:

$$v'_{obs} = v_{rev} - v_{eq} \cdot \cos\varepsilon = \sqrt{\frac{GM_S}{r_E}} - \frac{2\pi R_E}{T_{rot}} \cdot \cos\varepsilon = 29{,}362\ km/s$$

Скоростта на астероида относно наблюдателя е:

$$\Delta v'_{ast} = v_{per} - v'_{obs} = 12{,}6\ km/s$$

Видимата ъглова скорост на движение на астероида в перихелия е:

$$\omega'_{ast} = \frac{\Delta v'_{ast}}{\Delta r'_{ast}} = 2{,}55226 \cdot 10^{-7}\ rad/s = 189{,}5\, arcsec/h$$

Ъгловият размер на астероида в перихелий е:

$$\alpha_{ast} = \frac{d_{ast}}{\Delta r'_{ast}} = 4{,}051207 \cdot 10^{-7} rad = 0'', 084$$

Виждаме, че ъгловият диаметър на астероида е почти колкото разделителната способност на телескопа. Това означава, че астероидът ще засенчва много съществена част от петното на размиване на изображението. Следователно фотометричната точност е напълно достатъчна за да бъде открит и проследен астероидът пред диска на Слънцето.

*Критерии за оценяване (общо 14 т.):*

*А) 8 т.*

*За правилни разсъждения относно пространственото положение на астероида и неговата орбита – 1 т.*

*За правилни разсъждения и определяне на скоростта на наблюдателя – 1 т.*

*За правилни разсъждения и определяне на линейната скоростта на астероида относно наблюдателя – 2 т.*

*За правилни разсъждения и определяне на пространствената скорост на астероида - 1 т.*

*За правилно определяне на голямата полуос на орбитата на астероида – 2т.*

*За правилни разсъждения къде ще бъде астероидът след половин звездна година – 1т.*

*Б) 4 т.*

*За правилни разсъждения относно условията на видимост на астероида в перихелий (наблюдаване в зенита, посока на движение, наблюдения в местно пладне) – 1т.*

*За правилно посочване на разстоянието и определяне на линейната скорост, относителната линейна скорост и на видимата ъглова скорост на астероида – 3т.*

*В) 2 т.*

*За определяне на ъгловите размери на астероида – 0,5 т.*

*За правилни разсъждения относно възможността да се наблюдава астероидът на фона на слънчевия диск – 1,5 т.*

**Задача 4. Средна орбитална скорост.**

**А)** Два астероида се движат по кръгови орбити около Слънцето в равнината на земната орбита, в същата посока като Земята, и имат еднакви синодични периоди. Ако сумата на орбиталните скорости на двата астероида е $kv_{\oplus}$, изразете разликата в орбиталните им скорости с $k$ и $v_{\oplus}$. Приемете, че Земята се движи около Слънцето по кръгова орбита, с постоянна скорост $v_{\oplus}$. **[4т.]**

Ако орбитата не е кръгова, средната орбитална скорост е свързана с обиколката ѝ. Въпреки че няма проста формула за обиколка на елипса, през 1798 г. Джеймс Айвъри извежда дълга формула, от която може да се направи следното заключение:

Обиколката на елипса с голяма полуос $a$ и малка полуос $b$ е приблизително равна на обиколката на окръжност с радиус $r$, равен на средноаритметичното на $a$ и $b$.

Относителната грешка на това приближение расте с ексцентрицитета $e$ като тя е 0,1% за $e$ = 0,50 и 0,7% за $e$ = 0,70. За целите на задачата ще считаме приближението за идеално при $e$ < 0,50.

**Б)** Два астероида се движат по орбити около Слънцето с еднакъв период, но средната орбитална скорост на единия астероид е с 3% по-малка. Орбитата на първия астероид е кръгова. Какъв е ексцентрицитетът на орбитата на втория астероид? **[3т.]**

**В)** Пресметнете коефициента $q$, дефиниран в следното твърдение за орбити с малък ексцентрицитет:

В координатна система с център в центъра на орбитата и $x$-ос, растяща към афелия, точката, в която планетата има скорост, равна на средната орбитална скорост, има $x$-координата $x = qf$, където $f = ea$ е фокусното разстояние на орбитата. **[4т.]**

**Г)** Пресметнете на кои дати Земята се движи с орбитална скорост, равна на средната ѝ орбитална скорост. За целта може да приемете, че това се случва, когато Земята пресича малката ос на орбитата си, тъй като разликата от ефекта във **В)** подусловие е по-малка от 1 ден. Ексцентрицитетът на земната орбита е 0,0167. **[3т.]**

**Решение:**

**А)** Двата астероида имат еднакъв синодичен период $T_{SYN}$. За астероида на вътрешна орбита важи:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{1\text{yr}} + \frac{1}{T_{SYN}}$$

За астероида на външна орбита важи:

$$\frac{1}{1\text{yr}} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{SYN}}$$

Заместваме и получаваме:

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = \frac{2}{1\text{yr}}$$

За обект на кръгова орбита с радиус $r$, скорост $v$ и период $T$ важи

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \qquad \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$\frac{v^3 T}{8\pi^3} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{v^3}{2\pi GM}$$

Заместваме и получаваме

$$v_1{}^3 + v_2{}^3 = 2v_\oplus{}^3$$

От формулите за съкратено умножение получаваме

$$(v_1 + v_2)(v_1{}^2 - v_1 v_2 + v_2{}^2) = 2v_\oplus{}^3$$

$$(v_1 + v_2)((v_1 + v_2)^2 - 3v_1 v_2) = 2v_\oplus{}^3$$

Заместваме с $v_1 + v_2 = kv_\oplus$

$$k\left(k^2 v_\oplus{}^2 - 3v_1 v_2\right) = 2v_\oplus{}^2$$

$$\frac{3v_1 v_2}{v_\oplus{}^2} = k^2 - \frac{2}{k}$$

Заместваме с $v_2 = kv_\oplus - v_1$

$$3v_1\left(kv_\oplus - v_1\right) = v_\oplus{}^2\left(k^2 - \frac{2}{k}\right)$$

$$v_1{}^2 - kv_\oplus v_1 + \frac{v_\oplus{}^2}{3}\left(k^2 - \frac{2}{k}\right) = 0$$

Решаваме квадратното уравнение и получаваме

$$v_1 = \frac{kv_\oplus}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{k^2 v_\oplus{}^2 - 4\frac{v_\oplus{}^2}{3}\left(k^2 - \frac{2}{k}\right)}$$

$$v_2 = \frac{kv_\oplus}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{k^2 v_\oplus{}^2 - 4\frac{v_\oplus{}^2}{3}\left(k^2 - \frac{2}{k}\right)}$$

Разликата е

$$v_1 - v_2 = \sqrt{k^2 v_\oplus{}^2 - 4\frac{v_\oplus{}^2}{3}\left(k^2 - \frac{2}{k}\right)}$$

$$v_1 - v_2 = v_\oplus \sqrt{k^2 - \frac{4}{3}\left(k^2 - \frac{2}{k}\right)}$$

$$v_1 - v_2 = v_\oplus \sqrt{\frac{8}{3k} - \frac{k^2}{3}}$$

$$v_1 - v_2 = v_\oplus \sqrt{\frac{8 - k^3}{3k}}$$

**Б)** Средната скорост по орбитата с обиколка *C* е *v* = *C*/*T*. От III закон на Кеплер, двата астероида имат еднаква голяма полуос $a$ и период *T*. Следователно

$$C_2 = 0{,}97C_1$$

Кръговата орбита има обиколка

$$C_1 = 2\pi a$$

Елиптичната орбита има обиколка, приблизително равна на

$$C_2 = 2\pi\frac{(a+b)}{2} = \pi(a+b)$$

Заместваме с голямата полуос, изразена от $a$ и *e*:

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

Получаваме

$$C_2 = 1 + \sqrt{1-e^2} = 2.0{,}97$$

$$1 + \sqrt{1-e^2} = 1{,}94$$

Решаваме и получаваме

$$e = \sqrt{1 - 0{,}94^2} = 0{,}341$$

**В)** От Б) следва, че средната скорост е

$$v = \frac{\pi(a+b)}{T} = \frac{2\pi a}{T}\frac{\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}{2} = v_0\frac{\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}{2}$$

където v0 е скоростта в точките, в които малката ос пресича елипсата.
Ако планетата има средна скорост на разстояние *r* от звездата, то от ЗЗЕ

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{2a}{r} - 1\right)} = v_0\sqrt{\frac{2a}{r} - 1}$$

Приравняваме и получаваме

$$\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2} = \sqrt{\frac{2a}{r} - 1}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2}\right)^2 + 1\right)$$

За $e << 1$

$$\frac{a}{r} \approx \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2-e^2/2}{2}\right)^2 + 1\right) \approx \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{e^2}{4}\right)^2 + 1\right) \approx 1-\frac{e^2}{4}$$

$$r \approx a\left(1+\frac{e^2}{4}\right)$$

От Питагоровата теорема

$$r \approx \sqrt{(1+q)^2 f^2 + b^2}$$

$$r \approx \sqrt{(1+q)^2 a^2 e^2 + a^2(1-e^2)}$$

$$r \approx a\sqrt{(1+q)^2 e^2 + (1-e^2)}$$

$$\left(1+\frac{e^2}{4}\right) \approx \sqrt{((1+q)^2-1)e^2+1}$$

$$\left(1+\frac{e^2}{2}\right) \approx (2q)e^2 + 1$$

$$q \approx 1/4$$

**Г)** От В) дъгата, измината по земната орбита от пресечната точна с малката ос до точката със средна скорост е

$$\sin\theta \approx \frac{1}{4}e$$

$$\theta = 0{,}23°$$

Този ъгъл се изминава за по-малко от 1 ден, така че средната скорост обикновено ще бъде достигната на същата дата като пресечната точка с малката ос. Времето $t$ преди/след перихелий намираме от II Закон на Кеплер

$$\frac{t}{365{,}25\ \mathrm{d}} = \frac{\frac{\pi ab}{4} - \frac{eab}{2}}{\pi ab} = \frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi}$$

Получаваме $t$ = 90,3 d (като добавим времето за изминаване на ъгъл θ – 90,5 d). При перихелий на 3 януари, търсените дати са 3 април и 5 октомври.

*Критерии за оценяване (общо 14т.):*

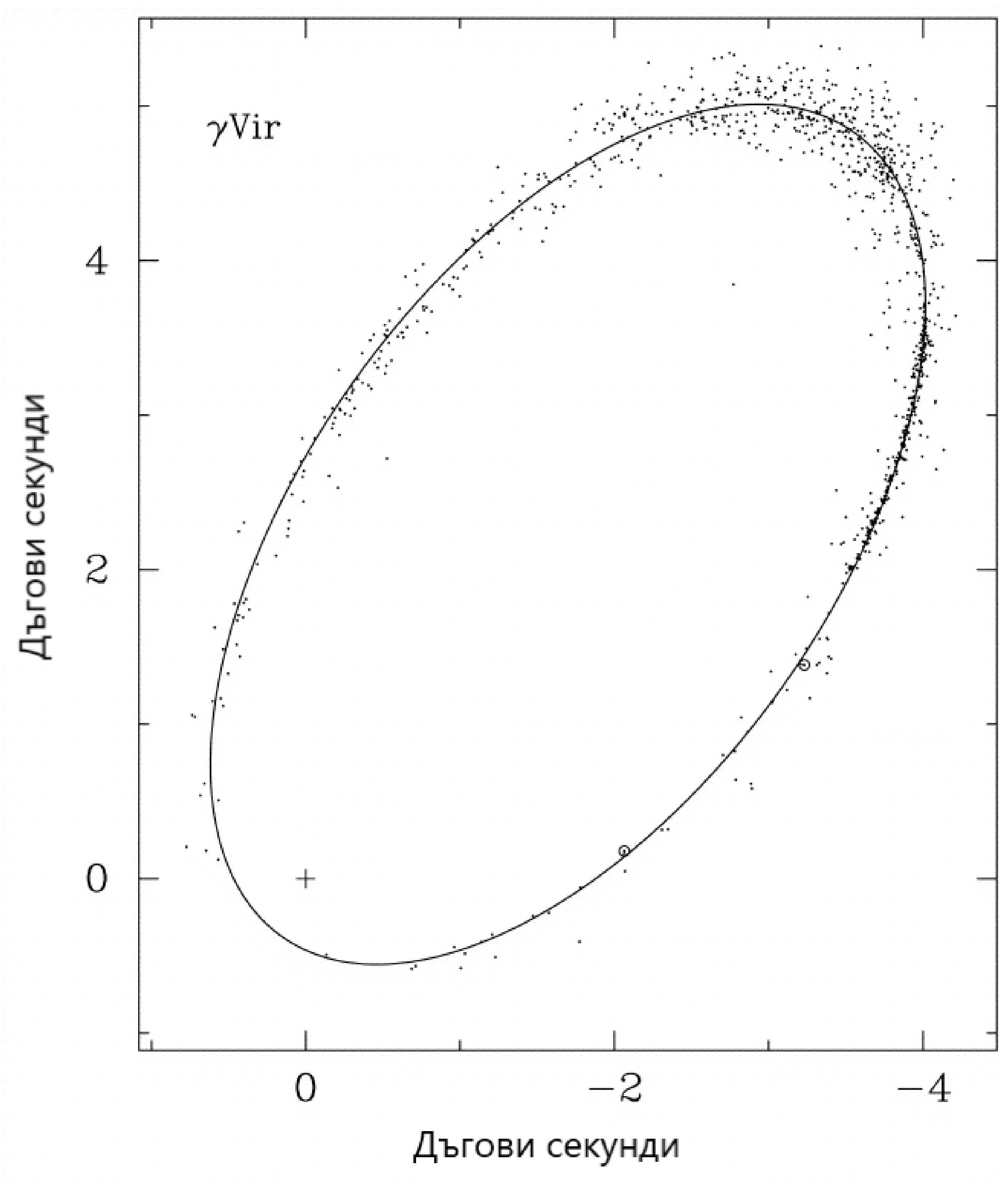
*А) 4т. за изразяване на разликата в орбиталните скорости*

*Б) 3т. за пресмятане на ексцентрицитета на орбитата на астероида*

*В) 4т.: за извеждане на q=1/4; За коректно заместване с примерни орбити се дават 1,5/4. За неточни аналитични приближения, които дават резултат между 0,2 и 0,3, се дават 3,5/4.*

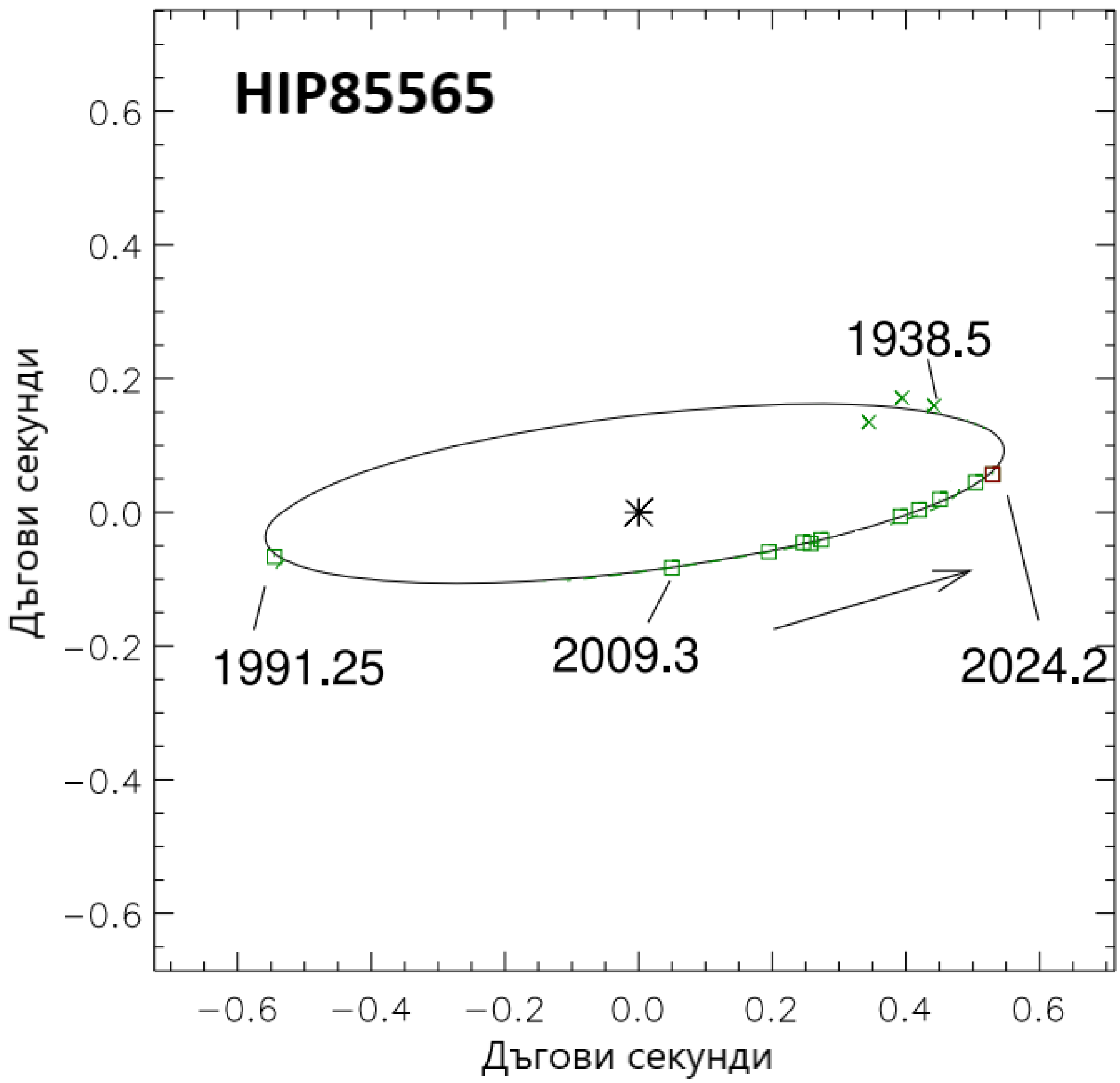
*Г) 3т.: 2т. за прилагане на II закон на Кеплер + 1т. за перихелия и датите*

**Фиг. 1 към задача 1.**




***Предайте този лист заедно с решенията си!***

**Фиг. 2 към задача 1.**




***Предайте този лист заедно с решенията си!***