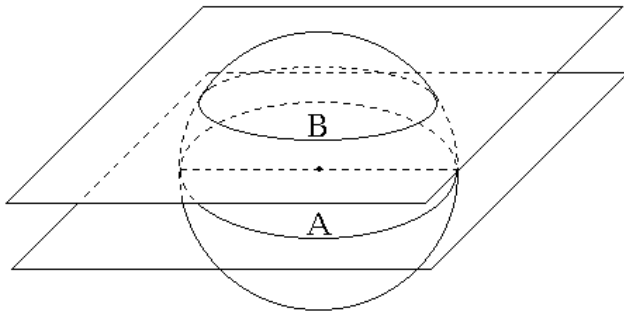


Кратки записки по астрономия

Ева Божурова, Александър Куртенков

1. Видими положения и движения на небесните тела.



Геометрия върху сфера

Сеченията на сферата с равнини са окръжности – А, В. Сечението на сфера с равнина, минаваща през центъра на сферата, се нарича голям кръг – А.

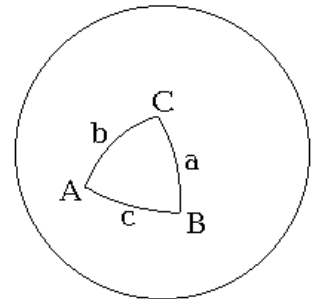
Най-кратката линия, свързваща две точки от сферата, е част от голям кръг.

Сферичният триъгълник има страни, които са дъги от големи кръгове. Ако А, В и С са ъглите при върховете му, а а, b и с са ъгловите дължини на страните му, то:

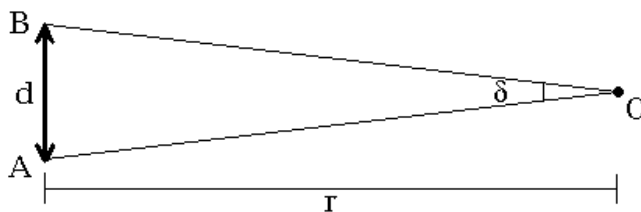
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$



Ъгли и линейни размери на обектите



d - линейен размер на обекта АВ

δ - видим ъглов размер на обекта

r - разстояние от наблюдателя О до обекта

Ако $d \ll r$, то:

$$\delta = d/r$$

където δ е в радиани, а d и r са в еднакви мерни единици.

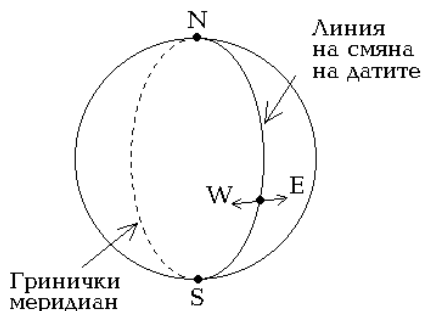
Когато δ се измерва в градуси,

$$\delta = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \frac{d}{r}$$

Когато δ се измерва в дъгови секунди,

$$\delta = 206265'' \frac{d}{r}$$

Използваме, че $1^\circ = 60' = 3600''$, а $1 \text{ rad} = (180/\pi)^\circ = 206265''$.

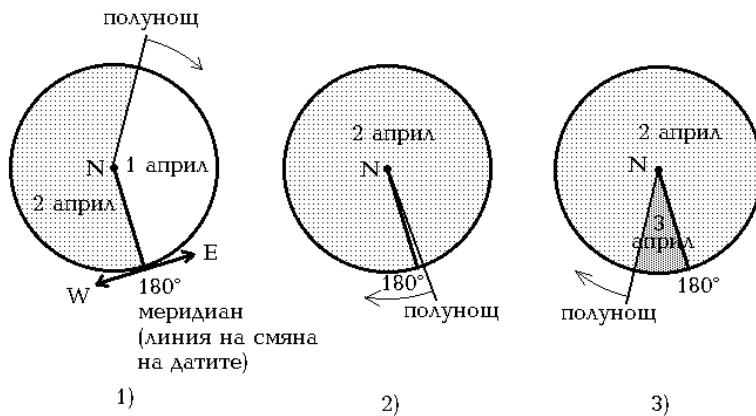


Линия на смяна на датите

Линията на смяна на датите е меридианът, намиращ се на 180° от Гриничкия меридиан. Когато пресичаме линията на смяна на датите:

- от запад на изток, повтаряме една дата;
- от изток на запад, прескачаме една дата.

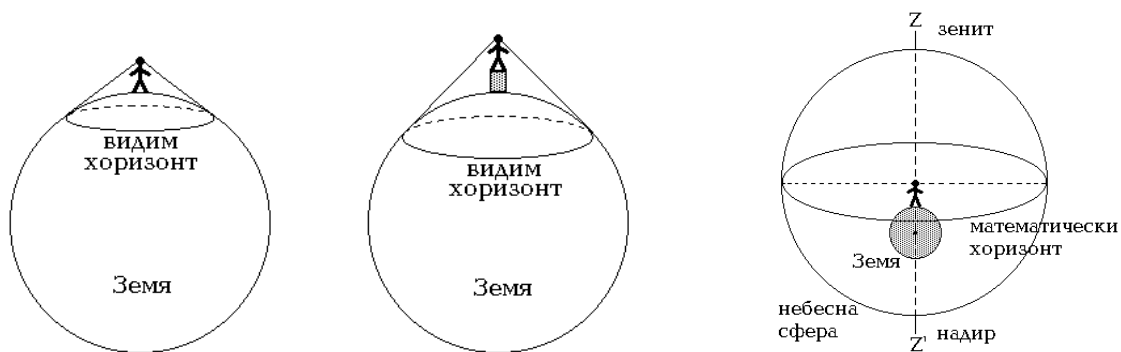
Всъщност линиите на смяна на датите са две. Едната е 180-градусовият меридиан и е неподвижна, а другата е меридианът, на който в даден момент е полунощ, и тя се движи по земната повърхност от изток на запад. На фигурата са показани положенията на линията, където е полунощ, в три последователни момента от време.



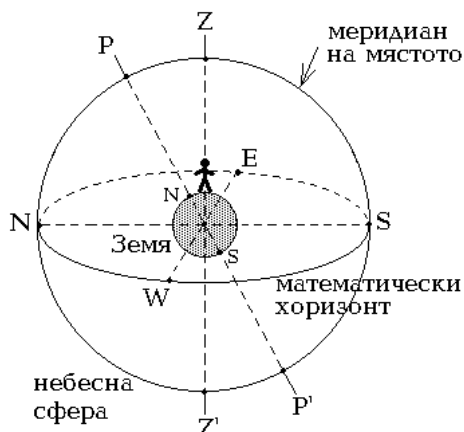
Така ако на 2 април се намираме на запад от линията на смяна на датите и я пресечем от запад на изток, то новият ден, който ще настъпи за нас след полунощ, ще бъде отново 2 април (повтаряме една дата).

Ако на 1 април сме на изток от линията на смяна на датите и я пресечем от изток на запад, то новият ден, който ще настъпи за нас след полунощ, ще бъде 3 април (прескачаме една дата).

Хоризонт



Видимият хоризонт е линия върху земната повърхност. Математическият хоризонт е линия върху небесната сфера. Той лежи в равнина, перпендикулярна на отвесната линия ZZ' . Математическият хоризонт е голям кръг от небесната сфера (наблюдателят е в центъра на небесната сфера). Фактически височината на наблюдателя и радиусът на земното кълбо се пренебрегват в сравнение с радиуса на небесната сфера. Нейният център все едно е в центъра на Земята.



Меридиан на мястото и посоки на света

Z – зенит, Z' – надир

NS – земна ос

P – северен небесен полюс,

P' – южен небесен полюс,

PP' – световна ос

$PZP'Z'$ – небесен меридиан на мястото. Небесният меридиан на мястото е цяла окръжност от небесната сфера, а не половин окръжност от единия полюс до другия, както обикновено се счита за меридианите.

Небесният меридиан на мястото пресича хоризонта в точките Север (N) и Юг (S).



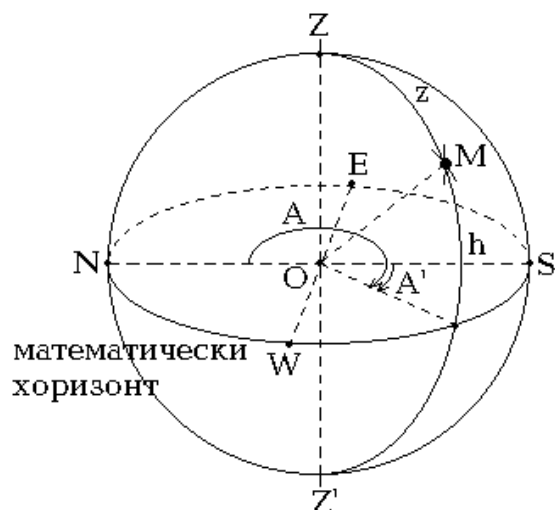
O – земен наблюдател в северното полукълбо
 ϕ – географска ширина на наблюдателя
 Небесният екватор пресича хоризонта в точките Изток (E) и Запад (W). Северният небесен полюс P е на височина над хоризонта, равна на ϕ – географската ширина на наблюдателя.

Колкото повече отиваме на север, толкова небесният полюс е по-високо над хоризонта. За наблюдател, намиращ се на северния полюс на Земята, P съвпада със Z. За наблюдател на земния екватор небесният екватор минава през зенита, а

двата небесни полюса лежат на хоризонта в точките Север и Юг. Небесният екватор дели небесната сфера на северна и южна небесна полусфери.

Ако се намираме на географска ширина ϕ в северното полукълбо на Земята, то в последователни моменти от време можем да наблюдаваме цялата северна небесна полусфера и една ивица от южната небесна полусфера с ширина $90^\circ - \phi$ под небесния екватор. Ако сме на северния полюс на Земята, то над хоризонта за нас във всеки момент от нощта е цялата северна небесна полусфера, но не и южната. От точка на земния екватор в последователни моменти от време за нас стават достъпни за наблюдение цялата северна и цялата южна небесна полусфера.

Хоризонтална координатна система (A, h)



M – небесно светило,
 O – наблюдател
 Хоризонтални координати:
 h – височина на светилото над хоризонта (от 0° на хоризонта до 90° в зенита и до -90° в надира). Вместо височината, може да се използва зенитното отстояние $z = 90^\circ - h$.
 A – геодезически азимут. Отчита се от точката Север по посока Изток – Юг – Запад (от 0° до 360°).
Понякога се използва астрономическият азимут A' , който се отчита в същата посока, но от точката Юг.

Хоризонталните координати на небесните светила се променят с течение на времето и зависят от географското положение на наблюдателя.

Еклиптика



S – Слънце
 T₁, T₂ – две последователни положения на Земята по нейната орбита около Слънцето
 NS – земна ос
 S₁, S₂ – проекции на Слънцето, гледано от Земята, върху небесната сфера.

Размерите на цялата земна орбита са също пренебрежимо малки в сравнение с небесната сфера. В резултат на движението на Земята около Слънцето, проекцията на Слънцето, гледано от Земята, на фона на звездното небе се движи от запад на изток. За една година тя описва един голям кръг по небесната сфера. Той се нарича еклиптика.

П, П' – северен и южен еклиптични полюси

Земната ос е наклонена спрямо оста на еклиптиката ПП' на ъгъл $23^{\circ}26'$.

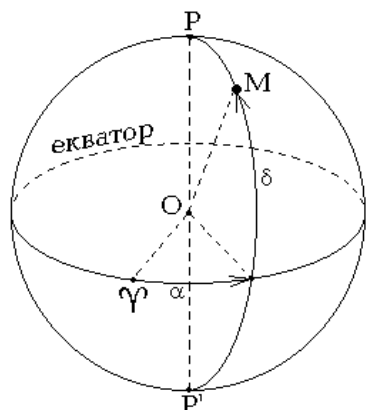


посока на годишното движение на Слънцето по еклиптиката

О – земен наблюдател
 Р – северен небесен полюс
 Р' – южен небесен полюс
 П и П' – северен и южен еклиптични полюси
 Υ – пролетна равноденствена точка
 $\underline{\Omega}$ – есенна равноденствена точка
 $\varepsilon = 23^{\circ}26'$ – наклон на земната ос спрямо перпендикуляра към еклиптиката (еклиптичната ос) и също – наклон на равнината на екватора към еклиптичната равнина.

Пренебрежимо малките размери на земната орбита около Слънцето ни дават право да пренесем успоредно еклиптичната ос ПП', така че вместо през Слънцето да минава през центъра на Земята, без да внасяме някаква грешка. Положението на еклиптичните полюси на фона на звездите при тази промяна остава същото, защото звездите са много далеч от нас.

В сравнение с по-горния чертеж, тук небесната сфера е завъртяна така, че световната ос РР' (съвпадаща със земната ос NS) да е вертикално разположена.

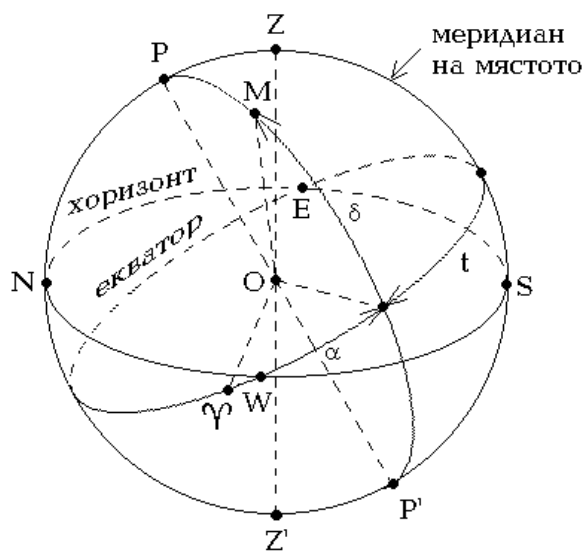


Екваториални координати (α , δ)

Р – северен небесен полюс, Р' – южен небесен полюс
 Υ – пролетна равноденствена точка, М – небесно светило
 α – ректасцензия (от 0° до 360° , или от 0h до 24h)
 δ – деклинация (от 0° на екватора до $+90^{\circ}$ на северния небесен полюс и до -90° на южния небесен полюс)

Ректасцензията се отчита по еkvатора в посоката, в която става годишното движение на Слънцето по еклиптиката. Тя е обратна на посоката на видимото денонощно въртене на небесната сфера. Ректасцензията и деклинацията на светилото не зависят от времето (в първо приближение, като не се отчитат прецесията и нутацията на земната ос) и от географското място на наблюдателя, за разлика от височината и азимута.

Часов ъгъл

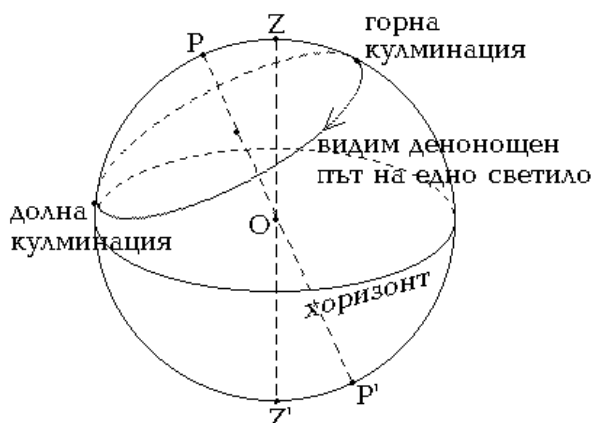


- P – северен небесен полюс
- P' – южен небесен полюс
- γ – пролетна равноденствена точка
- Z – зенит
- Z' – надир
- N, E, S, W – световни посоки
- M – небесно светило
- t – **часов ъгъл**

Часовият ъгъл се отчита от меридиана на мястото в посоката на видимото денонощно въртене на небесната сфера. Това е обратно на посоката на отчитане на ректасцензията. Часовият ъгъл зависи от местното време.

Еклиптични координати (λ , β)

В еклиптичната координатна система основни елементи са северният и южният еклиптични полюси и еклиптиката. Еклиптичните координати са еклиптична ширина β и еклиптичната дължина λ . Еклиптичната ширина на едно светило е ъгловото разстояние от еклиптиката до светилото и е аналогична на деклинацията при екваториалните координати. Еклиптичната дължина е аналогична на ректасцензията при екваториалните координати – отчита се също от пролетната равноденствена точка и в същата посока, но не по небесния еkvатор, а по еклиптиката. Слънцето прави една обиколка по еклиптиката за една година (в първо приближение - тропическа година, равна на 365.2422 d). Следователно всяко положение на Слънцето по еклиптична дължина съответства на определен момент от годината. Например, всяка година моментът на максимална активност на един метеорен поток може да се случва при една и съща слънчева еклиптична дължина, макар че това съответства на различен час от денонощието или дори на различна дата през различните години.



Горна и долна кулминация на светилата

- P, P' – северен и южен небесен полюс
- Z – зенит, Z' – надир

Меридиан на мястото - окръжността, която минава през P, P', Z, Z'. Горната и долната кулминации на едно светило са моментите, когато при видимото денонощно въртене на небесната сфера то пресича меридиана на мястото.

Когато наблюдателят се намира на някаква географска ширина φ (1), за него има незалязващи светила, изгряващи и залязващи светила и неизгряващи светила. Ако наблюдателят е на северния полюс на Земята (2), то при видимото денонощно движение на небесната сфера светилата остават на еднаква височина над хоризонта. Ако наблюдателят е на земния екватор (3), светилата изгряват и залязват перпендикулярно на хоризонта.



Максималната височина h_{max} (в горна кулминация) зависи пряко от географската ширина φ на мястото на наблюдението и деклинацията на обекта δ .

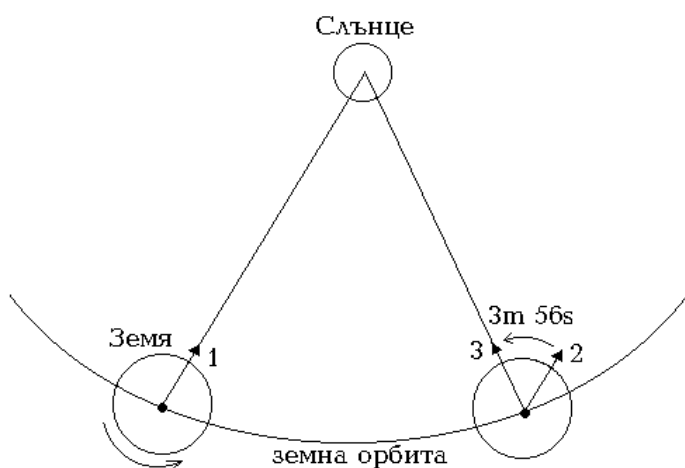
Звездно и слънчево време

Местно пладне – момент на горна кулминация на Слънцето

Местна полунощ – момент на долна кулминация на Слънцето

Слънчево денонощие (24h) – периодът между две последователни горни кулминации на Слънцето за дадено географско място, т.е. периодът на видимото денонощно обикаляне на Слънцето около Земята. **Равно е на мерната единица „ден“: $1d = 24h$.**

Звездно денонощие (23h 56m 04s) - периодът между две последователни едноименни кулминации на пролетната равноденствена точка (или на някоя звезда в първо приближение) за дадено географско място, т.е. периодът на видимото денонощно въртене на звездното небе около Земята. **Периодът на околоосно въртене на Земята.**



Звездното денонощие е с 3 min 56 s по-кратко от слънчевото.

1 – начално положение

2 – положение след едно звездно денонощие - едно завъртане на Земята спрямо неподвижните звезди

3 – положение след едно слънчево денонощие

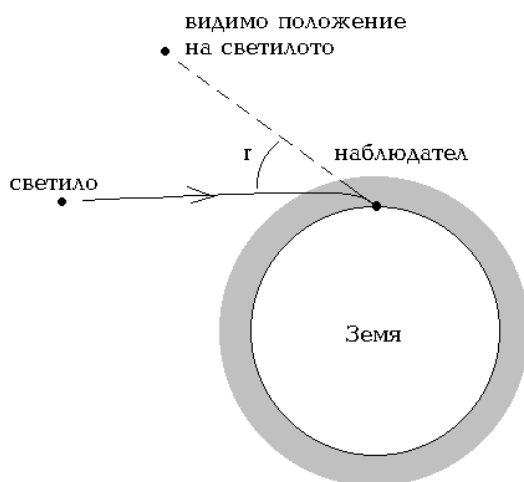
От гледна точка на земния наблюдател Слънцето извършва видимо годишно движение по еклиптиката - мести се на фона на

звездите от запад на изток с по 3 min 56 s на денонощие. Видимото денонощно въртене на небесната сфера става в обратна посока - от изток на запад. Слънцето участва и в него, но изостава от звездите с по 3 min 56 s на денонощие.

Местно звездно време s – то е равно на часовия ъгъл на пролетната равноденствена точка. Също така е равно на ректасцензията на звездите в горна кулминация. Звездното време е ъгълът, на който са завъртяни съзвездията по небето. То прави 24-часов оборот за времето, за което Земята прави едно завъртане около оста си: 23h 56min 4s. То избързва спрямо часовника с 3m 56s на ден (около 1 минута на всеки 6 h). Тоест, ако в даден момент звездното време е 5h 18m, след точно 6 часа то ще бъде приблизително 11h 19m.

В момент от звездно време s , когато часовият ъгъл на едно небесно светило с ректасцензия α е t (виж фигурата в раздел „Часов ъгъл“):

$$s = \alpha + t$$



Рефракция

Рефракция е видимото отместване на небесните светила спрямо хоризонта в резултат от пречупването на светлинните лъчи в земната атмосфера.

r – ъгъл на рефракция

Ъгълът на рефракция се увеличава с приближаване към хоризонта. Той зависи от атмосферните условия. Може да достигне до 35'.

Календар

Юлиански календар – въведен от Юлий

Цезар през 45 г. пр.н.е. Годината има 365 дни. На всеки 4 години 1 е високосна с 366 дни. Високосни са годините, чиито номер се дели на 4.

Григориански календар – въведен от папа Григорий XIII през 1582 г. Той е същият, като Юлианския, но:

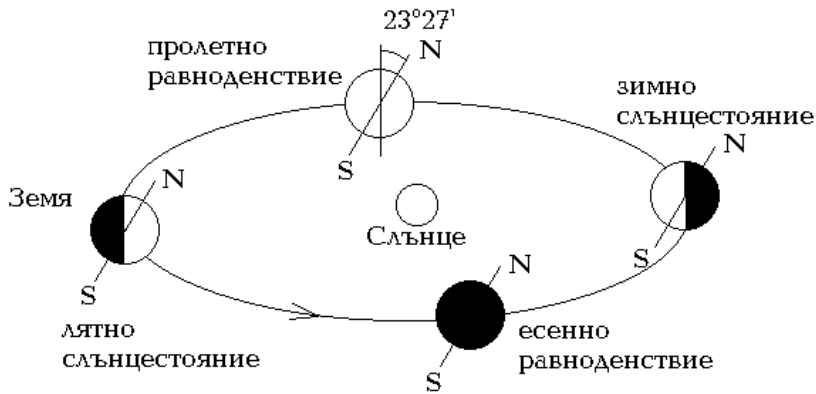
- стотните години (чиито номер се дели на 100) **не** са високосни
- високосни остават стотните години, чиито номер се дели на 400

Примери: 1996 - високосна, 1997 - не е високосна; 1700, 1800, 1900 - не са високосни, 1600 и 2000 **са** високосни.

В България Григорианският календар (нов стил) е въведен през 1916 г., когато за да се компенсира разликата от 13 дни, датата 31 март е била последвана от 14 април. Въвеждането на високосни години за корекция се налага поради факта, че тропическата година, на която се основава календарът, не съдържа цяло число денонощия, а $365\text{d } 05\text{h } 48\text{m } 45.98\text{ s} \approx 365.2422\text{ d}$. Замяната на Юлианския календар с Григорианския се е наложила от това, че тропическата година не е точно равна на 365 и една четвърт денонощия.

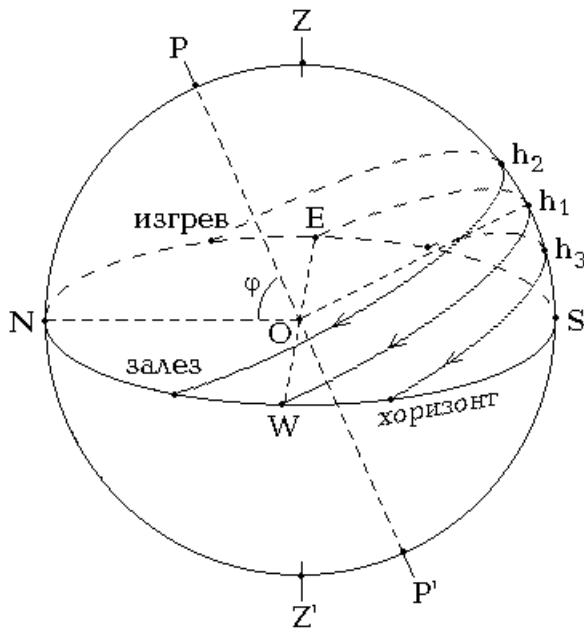
Тропическа година (365.2422 d) – времето между две последователни преминавания на Слънцето през пролетната равноденствена точка. Поради прецесията (обратното движение на пролетната равноденствена точка по еклиптиката) тропическата година е малко по-кратка от периода на обикаляне на Земята около Слънцето относно неподвижните звезди - звездна година ($365\text{d } 06\text{h } 09\text{m } 09.54\text{ s} \approx 365.2564\text{ d}$). Календарът се основава на тропическата година, понеже тя е свързана с периода на смяна на годишните времена, а това е по-значимо за ежедневието.

Смяна на годишните времена



Наименованията на моментите от годината се отнасят за Северното полукълбо

Поради обикалянето на Земята около Слънцето и наклона на земната ос, се сменят годишните времена, променят се продължителността на деня и нощта и точките на изгрев и залез на Слънцето се местят по хоризонта по различен начин за различни географски ширини.



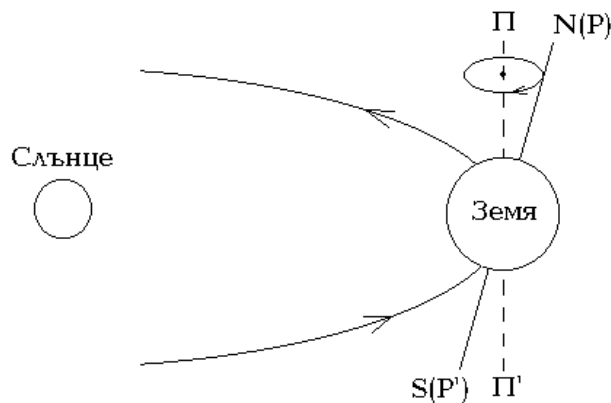
Видим денонощен път на Слънцето за географска ширина $\varphi > 23.5^\circ$ при равноденствията и слънцестоянията. $PZP'Z'$ – меридиан на мястото
 $h_1 = 90^\circ - \varphi$ — височина на Слънцето над хоризонта по пладне (горна кулминация) в пролетно или есенно равноденствие (за София $\varphi = 42.7^\circ \rightarrow h_1 = 47.3^\circ$).
 $h_2 = 90^\circ - \varphi + 23.5^\circ$ — височина на Слънцето по пладне при лятно слънцестояние (за $\varphi = 42.7^\circ \rightarrow h_2 = 70.8^\circ$). Слънцето изгрява от североизток и залязва на северозапад. Денят е дълъг, а нощта - кратка.
 $h_3 = 90^\circ - \varphi - 23.5^\circ$ — височина на Слънцето по пладне при зимно слънцестояние (за $\varphi = 42.7^\circ \rightarrow h_3 = 23.8^\circ$). Слънцето изгрява от югоизток и залязва на югозапад. Денят е кратък, а нощта – дълга.



1 – зони, където през лятното полугодие се наблюдават нощи, в които Слънцето не залязва под хоризонта (а през зимата - дни, в които то не изгрява). Периодите на такива нощи са разположени около моментите на лятно слънцестояние и продължителността им постепенно нараства от 0 дни до 6 месеца между географските ширини $66^\circ 34'$ и 90° .

2 – зони, където в някакви моменти от време еклиптиката минава през зенита.

Прецесия

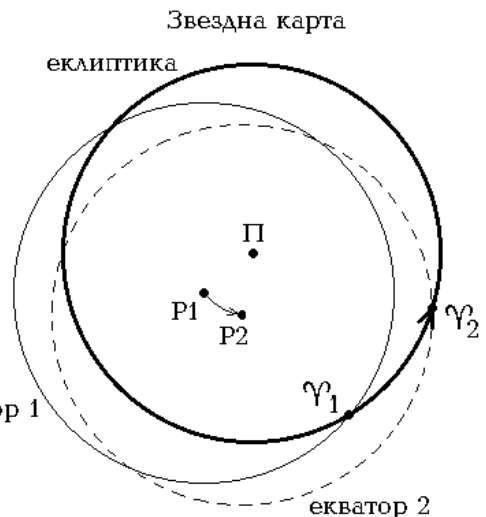


Земята ос прецесира - върти се под наклон около оста на еклиптиката в посока, **обратна** на посоката на движение на Земята около Слънцето, с период приблизително 26000 години. П и П' - полюси на еклиптиката.

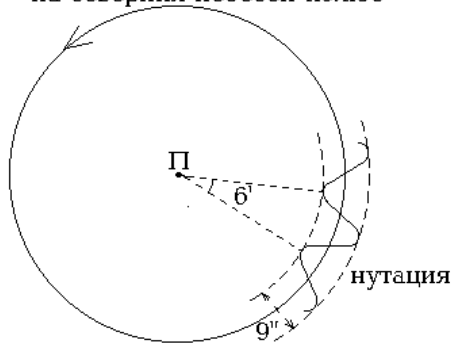
P_1 – настоящо положение на северния небесен полюс на фона на съзвездията
 P_2 – положение на северния небесен полюс след известно време - изместване в резултат от прецесията

П – северен полюс на еклиптиката - намира се в Дракон (близо до главата на Дракона, $\alpha = 18^h$, $\delta = 66^\circ 34'$)

За 26000 години P описва кръг с радиус $\sim 23^\circ$ около П.



прецесионно движение на северния небесен полюс



П – полюс на еклиптиката

Υ_1 – положение на пролетната равноденствена точка на фона на съзвездията сега

Υ_2 – положение на пролетната равноденствена точка след известно време.

Пролетната (както и есенната) равноденствена точка бавно се мести от изток на запад по еклиптиката с $50''.26$ годишно. Следователно екваториалните координати на звездите α и δ не са постоянни с времето, а звездните карти остаряват. Затова α и δ се дават за определена епоха - относно положението на Υ за определена година, например за епоха 1950 или 2000 г.

Нутация

Освен прецесията, земната ос извършва и друг вид малки колебания, наречени нутация. Периодът им е 18.6 години.

Движения на планетите

Меркурий и Венера - **вътрешни планети**

Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун - **външни планети**

Елонгацията е ъгловото разстояние между обекта и Слънцето по небето.

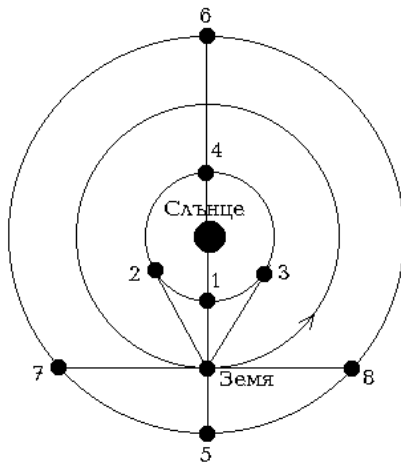
Вътрешна планета:

В горно и долно съединение не се вижда от Земята.

В максимална западна или източна елонгация е на най-голямото възможно ъглово отстояние съответно на запад или на изток от Слънцето. Това са периодите на най-добра видимост на планетата от Земята.

Източна елонгация - вечерна видимост на запад след залеза на Слънцето. Тогава Венера се вижда като Вечерница.

Западна елонгация - сутрешна видимост на изток преди изгрева на Слънцето. Тогава Венера се вижда като Зорница.



- 1 – долно съединение
- 2 – максимална източна елонгация
- 3 – максимална западна елонгация
- 4 – горно съединение
- 5 – противостояние (опозиция)
- 6 – съединение
- 7 – източна квадратура
- 8 – западна квадратура

Външна планета

Противостояние – най-добра видимост, намира се на $\sim 180^\circ$ елонгация, вижда се през цялата нощ.

Западна и източна квадратура - планетата се вижда на 90° на запад или на изток от Слънцето. Съединение – планетата не се вижда.

Видимите движения на планетите стават близо до еклиптиката.

Сидеричен период T_{SID} на орбитално движение на планета се нарича периодът ѝ на обикаляне около Слънцето относно т.нар. неподвижни звезди (орбиталният период на планетата, за който обикновено говорим).

Синодичен период T_{SYN} на орбитално движение на вътрешна планета се нарича периодът между две последователни долни съединения на планетата, а за една външна планета – периодът между две последователни противостояния. Синодичният период е периодът на повтаряне на конфигурацията Слънце – Земя – планета.

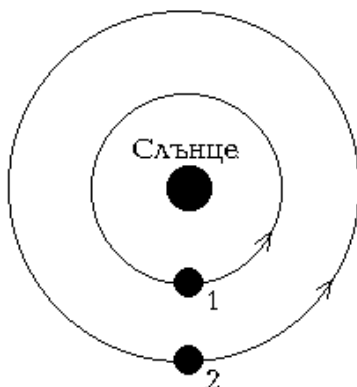
Ако T_\oplus е периодът на обикаляне на Земята около Слънцето, то:

• за вътрешна планета:

$$\frac{1}{T_{SID}} = \frac{1}{T_{SYN}} + \frac{1}{T_\oplus}$$

• за външна планета:

$$\frac{1}{T_\oplus} = \frac{1}{T_{SYN}} + \frac{1}{T_{SID}}$$



Тези формули лесно могат да бъдат изведени от следните съображения:

Ако T_1 и T_2 са съответно сидеричните периоди на планетите 1 и 2, то периодът T_{12} между две последователни противостояния на планетата 2 спрямо планетата 1 е синодичен период. Той може да се резглежда като период на обикаляне около Слънцето на планетата 2 в координатна система, неподвижно свързана с планетата 1. Т.е., ако ω_1 и ω_2 са ъгловите

скорости на движение на планетите 1 и 2 около Слънцето относно неподвижните звезди, а ω_{12} е ъгловата скорост на движение около Слънцето на планетата 2 в координатна система, неподвижно свързана с планетата 1, то:

$$\omega_{12} = \omega_2 - \omega_1$$

Тъй като съгласно третия закон на Кеплер планетата 2 се движи около Слънцето с по-малка ъглова скорост, отколкото планетата 1, т. е. $\omega_2 < \omega_1$, то $\omega_{12} < 0$.

Имайки пред вид, че $\omega = 2\pi/T$, получаваме:

$$1/T_{12} = 1/T_1 - 1/T_2$$

Ако считаме планетата 1 за Земята, получаваме съотношението за външна планета (в случая планетата 2), а ако считаме планетата 2 за Земята, то получаваме съотношението за вътрешна планета (в случая планетата 1). По подобен начин може да се получи съотношение между слънчевото денонощие $24\text{h} = 1\text{d}$, звездното денонощие $23\text{h } 56\text{min } 4\text{s} = 0.9972685\text{ d}$, и периода на обикаляне на Земята около Слънцето $1\text{yr} = 365.25\text{ d}$:

$$1/(0.9972685\text{ d}) = 1/(1\text{ d}) + 1/(365.25\text{ d})$$

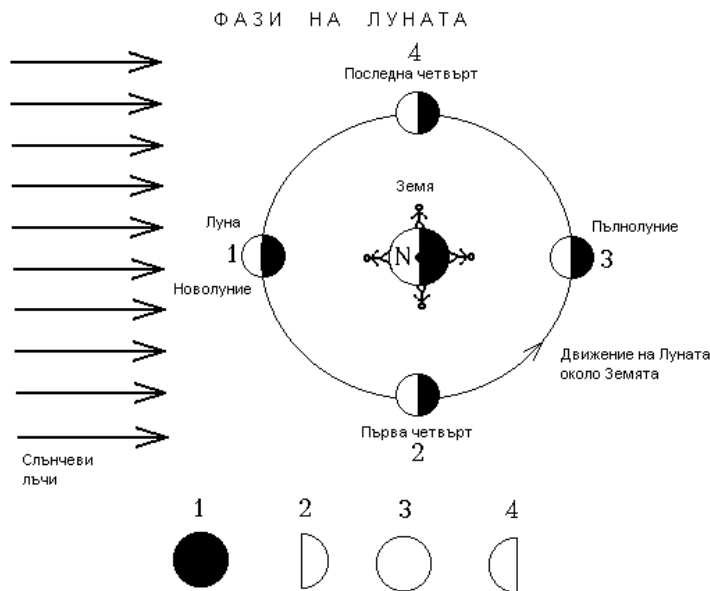
Движение и фази на Луната

Как виждаме Луната в различните фази:

1. новолуние
2. първа четвърт, дясната половина на лунния диск е осветена; Луната е растяща
3. пълнолуние
4. последна четвърт, лявата половина на лунния диск е осветена; Луната "старее", смаява се.

При новолуние Луната е над хоризонта през деня заедно със Слънцето.

При първа четвърт тя е на 90° източно от Слънцето, като осветената част от диска е



Вид на лунните фази за наблюдател от Северното полукълбо

обърната в посока към Слънцето. Над хоризонта е през втората половина на деня и през първата половина на нощта.

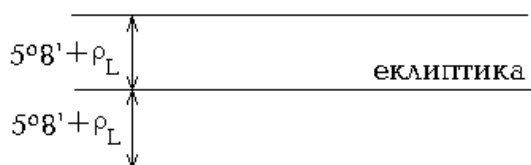
При пълнолуние е на 180° отстояние от Слънцето и се вижда през цялата нощ.

При последна четвърт Луната е на 90° западно от Слънцето и е над хоризонта през втората половина от нощта и първата половина от деня.

Поради движението на Луната около Земята, Луната се мести на фона на съзвездията от запад на изток. Това движение е доста бързо – тя се премества

на фона на звездите с $13^\circ 10'$ на денонощие, т.е. Луната се премества с почти $0,5^\circ$ (или с един свой диаметър) на час. Затова всеки ден изгревът на Луната закъснява с около 50 минути спрямо времето на изгрева ѝ за предишния ден.

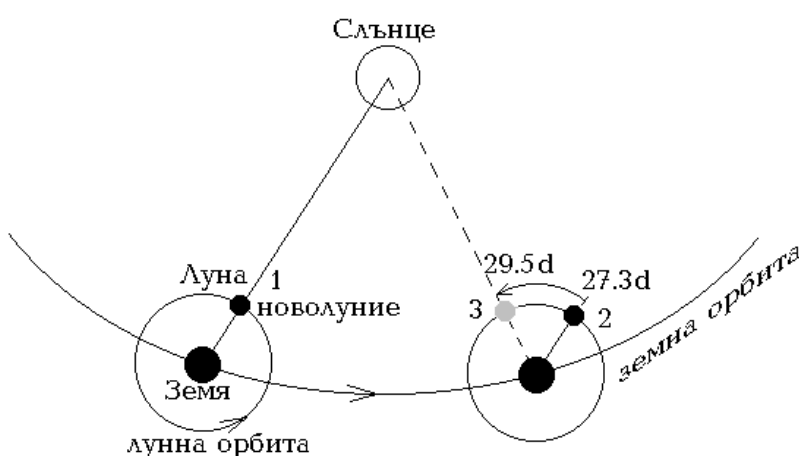
Наклон и прецесия на лунната орбита



Лунната орбита е наклонена на $5^{\circ}08'$ относно равнината на еклиптиката. Следователно покрития на звезди от Луната стават в зоната около еклиптиката с ширина $2 \times (5^{\circ}08' + \rho_L)$, където ρ_L е видимият ъглов радиус на Луната. Лунната орбита прецесира с период ≈ 18.60 уг около оста на еклиптиката и

следователно в различни моменти от време Луната може да се намира навсякъде из тази зона на фона на звездите.

Сидеричен (звезден) и синодичен месец



Синодичен месец (29.53 d) е периодът между две едноименни лунни фази. Сидеричният месец (27.32 d) е периодът на въртене на Луната около Земята спрямо звездите.

- 1 – начално положение
- 2 – положение след един сидеричен месец
- 3 – положение след един синодичен месец

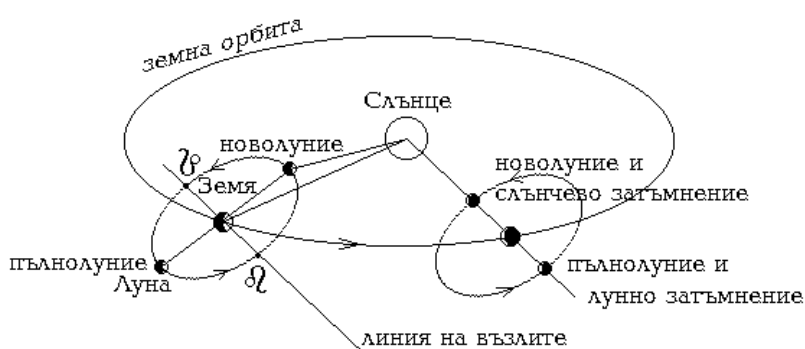
Връзката между синодичния месец, сидеричния месец и периода на обикаляне на

Земята около Слънцето ($1 \text{ уг} = 365.25 \text{ d}$) е:

$$\frac{1}{27.32 \text{ d}} = \frac{1}{29.53 \text{ d}} + \frac{1}{365.25 \text{ d}}$$

Затъмнения

Лунни и слънчеви затъмнения



- Ω възходящ възел
- ω низходящ възел

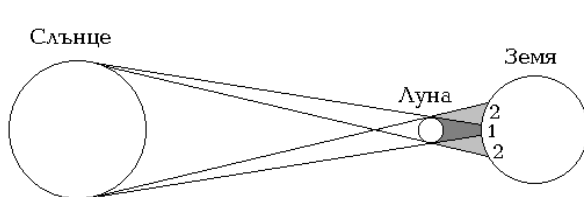
Лунната орбита е наклонена към еклиптиката на $5^{\circ}8'$. Поради това не при всяко новолуние има слънчево затъмнение и не при всяко пълнолуние – лунно затъмнение. При движение на Земята около Слънцето лунната орбита остава успоредна сама на себе си (ако пренебрегнем прецесията ѝ). Точките, в които лунната орбита пробжда равнината на еклиптиката, се наричат възли. Линията, която ги съединява, е линия на възлите.

Затъмненията стават, когато линията на възлите на лунната орбита е достатъчно близка или съвпада с линията, свързваща Земята и Слънцето. В такъв период от годината може да се случи едно затъмнение или поредица от две, или най-много три, редуващи се през две седмици, слънчеви и лунни затъмнения. Подобни периоди на затъмнения има обикновено два пъти годишно, при което Земята се намира в две диаметрално противоположни области на орбитата си около Слънцето. Поради прецесията на лунната орбита всяко следващо съвпадение на линията на възлите с линията Земя-Слънце се случва малко по-рано от половин година след предишното. Така в една календарна година могат да се случат и три периода на затъмнения. В годината може да има общо най-малко 2 и най-много 7 затъмнения, като от 0 до 3 могат да са лунните и от 2 до 5 слънчевите.

Периодът на повтаряне на взаимните положения на Земята, Луната и Слънцето, т.е. на повторение на редуващите се по определена закономерност лунни и слънчеви затъмнения, е ~6585.3 дни, което е равно на 18 години и 10, 11 или 12 дни (в зависимост от високосните години). Саросът е равен на 223 синодични месеца.

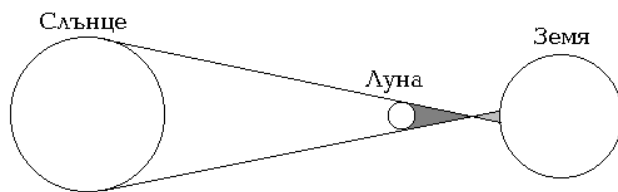
Слънчево затъмнение

Пълно слънчево затъмнение: Всяка точка от повърхността на едно светещо тяло излъчва светлина във всички посоки. В следващите фигури са начертани само най-важните лъчи, излизащи от определени точки от повърхността на Слънцето.



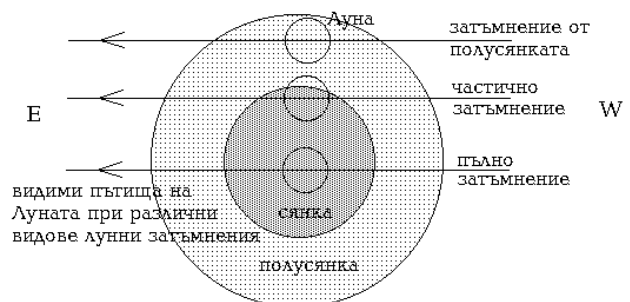
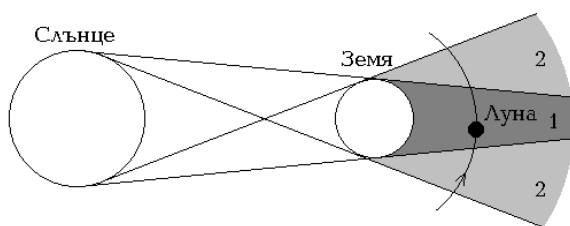
- 1 – лунна сянка (зона на пълно слънчево затъмнение)
- 2 – полусянка (зона на частично слънчево затъмнение)

Диаметърът на лунната сянка върху земната повърхност е ~100-400 km. Луната постепенно закрива видимия слънчев диск от запад на изток. Лунната сянка се движи по земната повърхност от запад на изток.



Пръстеновидно затъмнение: При пръстеновидно затъмнение Луната не закрива целия видим слънчев диск, а един светъл пръстен от него остава да се вижда около тъмния лунен диск.

Лунно затъмнение



1 - земна сянка, 2 - полусянка

Луната навлиза в земната сянка от запад на изток.

2. Гравитация.

Механика (кратък преговор)

Втори принцип на механиката: Ако на тяло (материална точка) с маса m действа сила F , тялото се движи с ускорение a , при което:

$$F = ma$$

Ускорението има две компоненти спрямо направлението на скоростта: тангенциално **ускорение** (по направлението на скоростта) и **нормално ускорение** (перпендикулярно на направлението на скоростта).

Тангенциалното ускорение променя стойността на скоростта и за много малки интервали от време Δt е

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Нормалното ускорение не променя стойността на скоростта, а само посоката и е

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

където r е радиусът на кривината на завоя по траекторията. За равномерно движение ($a_T = 0$) по окръжност с радиус r пълното ускорение е нормално и се нарича „центростремително ускорение“:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Импулс на тяло с маса m , движещо се със скорост v , е величината

$$p = mv$$



Моментът на импулса (или **ъглов момент**) на тяло с маса m , движещо се с линейна скорост v около точка на разстояние r , има абсолютна стойност

$$L = mvr \sin \theta$$

Тук θ е ъгълът между направлението на v и r . Ако движението е по окръжност, $\theta = 90^\circ$ и

$$L = mvr = m\omega r^2$$

Ъгловата скорост при въртене е

$$\omega = \frac{v_T}{r}$$

където v_T е тангенциалната скорост спрямо оста на въртене. При движение по окръжност

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T}$$

където $T[s]$ е периодът на обикаляне на тялото около центъра, а ω е в rad/s .

Кинетичната енергия на тяло с маса m , движещо се със скорост v , е

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

В поле на консервативна сила можем да дефинираме **потенциална енергия**, зависеща от положението на тялото и от съответната сила, напр. гравитационна потенциална енергия, електрична потенциална енергия, еластична потенциална енергия и т.н.

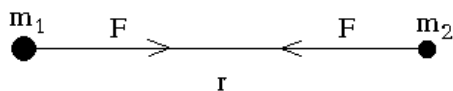
За затворени механични системи са в сила законите за запазване на **1) импулса, 2) момента на импулса и 3) енергията.**

Центростремително ускорение може да се придава на тялото примерно от гравитационна сила, създавана от друго тяло, намиращо се в центъра на окръжността. Нека разгледаме координатна система, свързана с тялото, което се движи с постоянна скорост по окръжност. Движението на тялото е ускорително (тялото има центростремително ускорение). Тъй като тялото не се движи равномерно праволинейно, свързаната с него координатна система е неинерциална. Относно такава координатна система действат т.нар. **инерчни сили**, които не съществуват при разглеждане на същата ситуация относно инерциална координатна система, свързана, например с неподвижен страничен наблюдател. Ако неинерциалната отправна система се движе спрямо инерциалната с ускорение a , инерчната сила върху тяло с маса m в нея е $F_i = -ma$

В нашия случай има инерчна сила, която се нарича **центробежна**. Тя е равна по големина на центростремителната сила и действа върху тялото в посока, обратна на посоката към центъра на въртене, но само в неинерциалната отправна система

$$F_C = \frac{mv^2}{r}$$

Закон на Нютон за гравитацията



$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

F – сила на привличане между две тела

m_1 и m_2 – маси на телата

r – разстояние между тях

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ – гравитационна константа.

Ускорение на силата на тежестта на повърхността на кълбовидно тяло (напр. планета, звезда) с маса M и радиус R :

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

за Земята $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Ускорението на силата на тежестта на разстояние r от центъра на тялото ($r > R$) е:

$$a_G = \frac{GM}{r^2}$$

Гравитационната сила, с която дадено тяло действа на други тела на еднакви разстояния от него, им придава еднакви ускорения, независимо от техните маси.

Гравитационната потенциална енергия на тяло с маса m в поле, създадено от тяло с маса M на разстояние r е

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

Гравитационната потенциална енергия винаги е отрицателна!

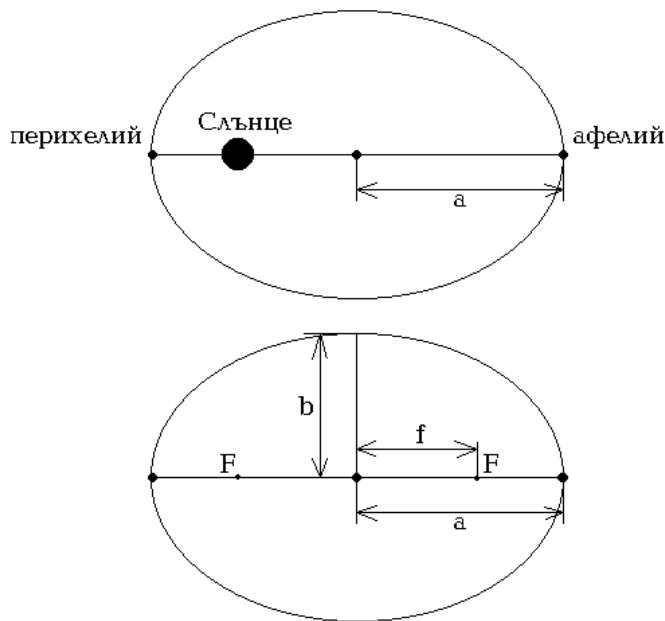
Само на малки височини ($h \ll R$) над повърхността на планета с гравитационно ускорение g може да се ползва формулата за променливата част на гравитационната потенциална енергия

$$E_p \approx E_{p0} + mgh$$

Тук E_{p0} е гравитационната потенциална енергия на тялото на височина $h = 0$.

Закони на Кеплер

Кеплер е формулирал законите си за система Слънце-планета, но те са валидни във всички случаи, в които отчитаме единственото гравитационното взаимодействие между две тела (звезда-планета, звезда-звезда, планета-спътник и т.н.).



I Закон на Кеплер. Планетите се движат около Слънцето по елипси, в един от фокусите на които се намира самото Слънце.

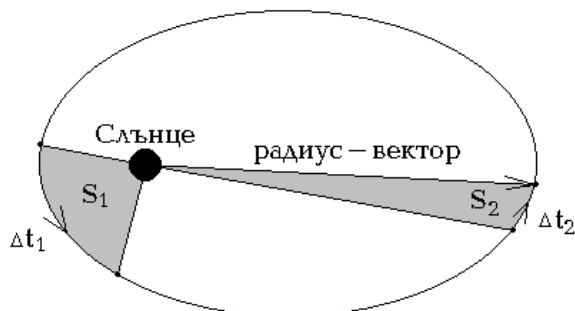
a - голяма полуос на елипсата
 b - малка полуос на елипсата
 f - фокусно разстояние

Ексцентрицитетът на елипсата е:

$$e = \frac{f}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Когато $e = 0$, елипсата става окръжност с радиус $r = a = b$, а когато $e = 1$, елипсата се сплесква до отсечка с дължина $2a$.

Разстоянието от Слънцето до планетата в перихелий е: $r_p = a - f = a(1 - e)$
 а разстоянието в афелий: $r_A = a + f = a(1 + e)$



II Закон на Кеплер. Планетите се движат по орбитите си неравномерно. За равни интервали от време радиус-векторът Слънце-планета описва равни по големина площи от орбитата.

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = const$$

$\Delta t_1, \Delta t_2$ – интервали от време

S_1, S_2 – описвани площи

Ако $\Delta t_1 = \Delta t_2$, то $S_1 = S_2$.

Следователно близо до перихелия на орбитата си планетата се движи най-бързо, а близо до афелия – най-бавно. II Закон на Кеплер е следствие от Закона за запазване на момента на импулса. Ако масата на тялото не се променя, то

$$vr \sin \theta = \text{const}$$

Тъй като в перихелий и афелий (и само там) $\theta = 90^\circ$, от II закон на Кеплер следва, че

$$v_P r_P = v_A r_A$$

III Закон на Кеплер.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

където:

a – голяма полуос на орбитата на планета, в метри

T – периоди на обикаляне около звездата (Слънцето), в секунди

M – маса на звездата (Слънцето), в килограми, G – гравитационна константа.

Често е удобно да се използва формата на III Закон на Кеплер, използвайки мерните единици a_u , T_y , M_\odot (астрономически единици, години, слънчеви маси). В тези мерни единици

$$\frac{a^3}{T^2} = M$$

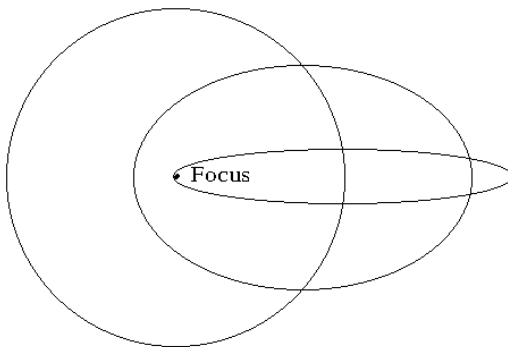
Ако обектът обикаля директно около Слънцето (астероид, комета и т.н.), то в a_u и T_y

$$\frac{a^3}{T^2} = 1$$

Тези форми на закона са получени като се има предвид, че масата на коя да е от планетите $m \ll M$. В точен вид за две тела с маси M_1 и M_2 , движещи се с период T около общия си център на масите, законът е:

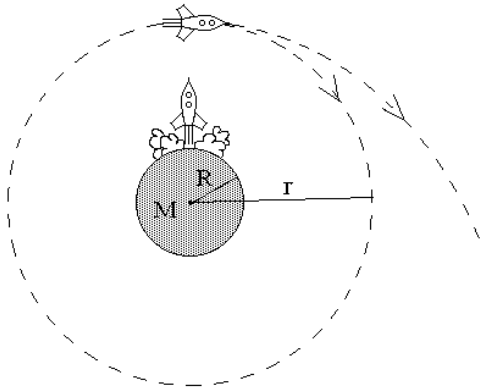
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

където a е голямата полуос на орбитата на едно от телата, описвана в координатна система, в която другото тяло се приема за неподвижно.



Ако едно тяло се движи около друго тяло по елипса с голяма полуос a , то неговият период ще бъде един и същ, независимо от това каква е малката полуос на елипсата, т.е. независимо от ексцентрицитета на елипсата. Показаните на фигурата орбити имат различен ексцентрицитет, но еднаква голяма полуос. Орбиталният период е един и същ за тела, движещи се по всяка от тези орбити.

Космически скорости



Първа космическа скорост: минималната необходима скорост на едно тяло, за да стане то спътник на тялото M (да се движи около него по кръгова орбита с радиус R).

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

където G е гравитационната константа.
За Земята $v_I = 7.9$ km/s.

За да се движи едно тяло по кръгова орбита с радиус r ($r > R$), то трябва да има скорост, равна на **кръговата скорост**:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Втора космическа скорост: минималната необходима скорост на едно тяло, за да напусне то завинаги тялото M (да се отдалечава по парабола), стартирайки от повърхността му.

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

За Земята $v_{II} = 11.2$ km/s

Ако тялото-спътник се намира на разстояние r ($r > R$) от тялото M , минималната скорост, необходима на тялото-спътник за да не остане в орбита около тялото M , а да се отдалечава вечно от него, е параболичната скорост (**скорост на избягване**):

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Черни дупки

Ако започнем да свиваме тялото, без да променяме масата му (само R намалява), то v_{II} ще расте. Следователно ще става все по-трудно от повърхността му да излети обект, който завинаги да го напусне. Когато тялото M се свие дотолкова, че v_{II} се изравни със скоростта на светлината c , то се превръща в черна дупка. Това става при радиус:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Радиусът R_S се нарича **радиус на Шварцшилд**. За масата на Слънцето M_\odot той е 2.96 km, поради което радиусът на Шварцшилд за черна дупка с маса M може да се пресмята бързо чрез

$$R_S \approx \frac{M}{M_\odot} \times 3.0 \text{ km}$$

Пълна механична енергия по орбита

Пълната механична енергия се запазва при орбиталното движение около централно тяло. За елиптична орбита с голяма полуос a тя е

$$E = E_K + E_P = -\frac{GMm}{2a}$$

Пълната механична енергия по орбити с еднаква голяма полуос около едно и също централно тяло е еднаква. Тоест, в дадена система пълната механичната енергия зависи само от голямата полуос на орбитата.

Оттук скоростта на разстояние a от централното тяло (в двете точки, където малката ос пресича орбитата) е

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Скоростта в перихелий и в афелий е съответно

$$v_P = v_0 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$
$$v_A = v_0 \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

При движение по елипса $E < 0$, по хипербота $E > 0$, а в граничния случай – движение по парабола – $E = 0$. С втора космическа скорост тялото тръгва по парабола, т.е. формулата за скорост на избягване е решение на уравнението $E = 0$.

Двойни системи със сравними маси

Компонентите в такива системи (напр. двойни звезди, двойни астероиди и т.н.) обикалят около общ център на масите като във всеки един момент

$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

където r_1 и r_2 са разстоянията на компонентите M_1 и M_2 до центъра на масите. От закона за запазване на импулса

$$M_1 v_1 = M_2 v_2$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$
$$e_1 = e_2 = e$$

Центърът на масите винаги е между компонентите и орбитите им около него са с еднакъв ексцентрицитет. Ако разгледаме в неинерциална отправна система относителна орбита, в която едната компонента обикаля около другата, трите закона на Кеплер остават валидни.

Слънчева система

Слънце: маса $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}$ kg (над 99.8% от масата на Слънчевата система), радиус $R_{\odot} = 696\,000$ km, ротационен период 25 d на екватора, 34 d на полюса

Планети:

- земеподобни планети – Меркурий (размер 4880 km), Венера (12100 km), Земя (12740 km), Марс (6780 km): по-малки, по-маломасивни, по-плътни
- газови гиганти – Юпитер (139 800 km), Сатурн (116 500 km), Уран (50 700 km), Нептун (49 200 km): по-големи, по-масивни, по-ниска плътност

Средни r от Слънцето: 0.39 au, 0.72 au, 1.00 au, 1.52 au, 5.2 au, 9.6 au, 19.2 au, 30.1 au

Спътници на планетите:

Меркурий – 0; Венера – 0; Земя – 1 (Луна); Марс – 2 (Деймос, Фобос)

Юпитер – над 90, вкл. Йо, Европа, Ганимед, Калисто;

Сатурн – над 200, вкл. Титан, Рея, Япет, Диона, Тетида, Енцелад, Мимас

Уран – над 20, вкл. Титания, Оберон, Умбриел, Ариел, Миранда

Нептун – над 15, вкл. Тритон, Протей, Нереида

Малки тела (minor planets):

Обозначават се с номер и име, напр. Минерва = 93 Minerva. Биват:

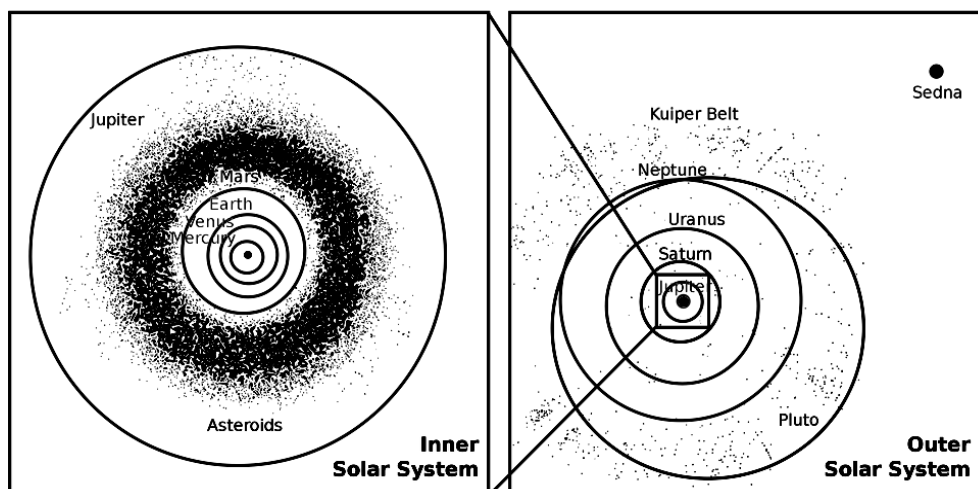
- астероиди от Главния пояс: между орбитите на Марс и Юпитер (предимно на $r = 1.8 - 4.0$ au от Слънцето), $> 1\,000\,000$ открити, вкл. Церера, Палада, Веста, Хигия
- транснептунови обекти (TNO): на $r > 30$ au от Слънцето, > 6000 известни, вкл. обектите в пояса на Кайпер ($r = 30 - 55$ au) и разсеяния диск ($r = 40 - 100$ au)
- близкоземни астероиди (NEO): достигат под 0.3 au от Земята, $> 30\,000$ известни
- кентаври: между орбитите на планетите гиганти ($r = 5.2 - 30$ au), > 900 известни вкл. Хирон (200 km), Харикло (250 km)
- троянци: около точките на Лагранж L_4 и L_5 , на 60° от планетата по орбитата ѝ

Планетите-джуджета са малки тела в хидростатично равновесие, вкл. Плутон (2370 km), Ерида (2320 km), Хаумея (1600 km), Макемаке (1400 km), Кваоар (1200 km), Гонггонг (1200 km), Седна (1000 km), Салация (800 km), всички от които са TNO. От астероидите в Главния пояс единствено Церера (940 km) е планета-джудже.

Комети (общо над 4000 известни):

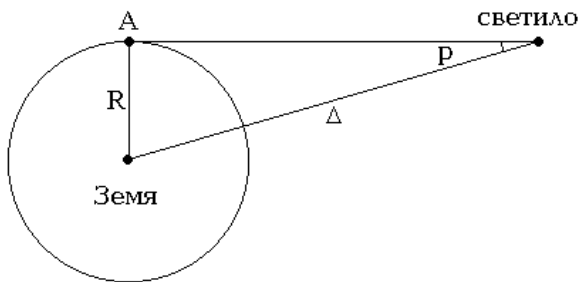
- (кратко)периодични: $T < 200$ уг, вкл. 1P/Halley, 2P/Encke, 17P/Holmes
- дългопериодични/непериодични: $T > 200$ уг, вкл. C/1843 D1 (Голямата комета от 1843 г.), C/1965 S1 (Икея-Сeki), C/1995 O1 (Hale-Ворп) и др.

Ядрата на дългопериодичните комети идват от Облака на Оорт – структура около Слънцето с вътрешен радиус ~ 2000 au и външен радиус над 100 000 au.



3. Звездна кинематика. Звездна астрофизика.

Денонощен паралакс



Денонощен хоризонтален паралакс

R – радиус на Земята

Δ – разстояние от центъра на Земята до светилото

A – земен наблюдател

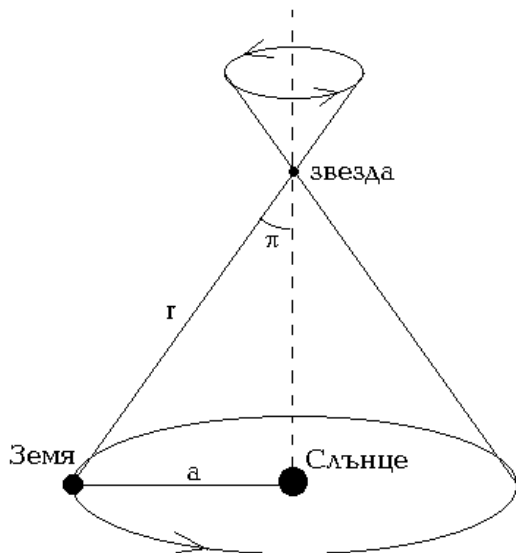
p – денонощен хоризонтален паралакс

$$\Delta = R/\sin p$$

Денонощният хоризонтален паралакс на луната е $p_L = 57'$, а на Слънцето $p_S = 8.8''$.

Денонощният паралакс се използва за определяне на разстоянията от нас до тела в Слънчевата система.

Годишен паралакс



r – разстояние до звездата

a – средно разстояние между Земята и Слънцето

ъгъл p – паралакс на звездата

$$r = a/\sin(p)$$

Понеже е малък, $\sin p \approx p[\text{rad}]$.

$1 \text{ rad} = 206265''$ (дъгови секунди)

$$r = 206265 a/p''$$

$a = 1 \text{ AU}$ (астрономическа единица)

$$1 \text{ AU} = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$$

$$r [\text{AU}] = 206265/p''$$

Парсек: $r = 1 \text{ pc}$, когато $p = 1''$

Светлинна година $1 \text{ ly} = (1 \text{ yr})c$

$$1 \text{ pc} = 3.26 \text{ ly} = 206265 \text{ AU}$$

$$r[\text{pc}] = \frac{1}{p''}$$

На фигурата е показан частен случай, когато звездата се намира на права линия, минаваща през Слънцето и перпендикулярна на равнината на еклиптиката. Звезди, намиращи се в други положения, при видимото си годишно паралактично движение описват върху небесната сфера елипси с различен ексцентрицитет. Паралаксът на такива звезди е равен на ъловия размер на големите полуоси на описваните от тях елипси. Елипсите, които описват звездите, са толкова по-сплеснати, колкото по-близо са звездите до равнината на земната орбита около Слънцето. Елипсите, описвани от звезди, които лежат в равнината на земната орбита (т.е., които са на еклиптиката върху небесната сфера), се израждат в отсечки.

Собствено движение

Собственото движение μ е ъгловата скорост на звездите спрямо най-далечните галактики, които фиксират екваториалната координатна система. По формулата за ъглова скорост можем да пресметнем тангенциалната скорост на звезда на разстояние r :

$$v_T = \mu r$$

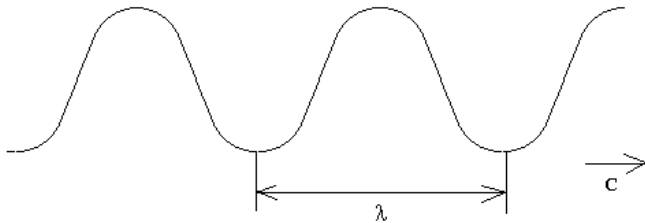
По-практично за изчисления е да работим с мерни единици km/s, "/yr и pc. Тогава

$$v_T = 4.74 \mu r$$

където $v_{\oplus} = 29.8 \text{ km/s} = (2\pi)(4.74 \text{ km/s})$ е средната орбитална скорост на Земята около Слънцето.

Светлинни вълни и ефект на Доплер (кратък преговор)

Скоростта на светлината е $u = c/n$, където n е коефициентът на пречупване на средата. В междузвездното пространство плътността е много ниска и в почти всички случаи можем да приемем, че $n = 1$.



λ – дължина на вълната
 $c = 300\,000 \text{ km/s}$ – скорост на разпространение на светлината във вакуум
 $T = \lambda/c$ – период на светлинната вълна
 $f = 1/T$ – честота на вълните
 $c = \lambda f$ – важно съотношение!

От дължината на светлинната вълна еднозначно се определя нейната честота и обратното. Колкото са по-дълги вълните, толкова по-нискочестотни са и обратното.

Ако източник, излъчващ светлина с дължина на вълната λ_0 и честота f_0 , се отдалечава от наблюдателя с лъчева (радиална) скорост v_R , то възприеманата от наблюдателя дължина на светлинната вълна от източника е $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, където при $v_R \ll c$:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_R}{c}$$

Величината z се нарича **червено отместване** и се измерва по спектрите на звездите. Ако източникът се приближава към наблюдателя, то $v_R < 0$ и $\Delta\lambda < 0$, т.е. отместването на дължината на вълната, възприемана от наблюдателя е към синия край на спектъра (червеното отместване е отрицателно).

С паралакс измерваме разстоянието до звездата.

С паралакс и собствено движение измерваме тангенциалната скорост v_T .

По червеното отместване изчисляваме радиалната скорост на звездата v_R .

Пълната пространствена скорост на звездата спрямо Слънцето е

$$v = \sqrt{v_T^2 + v_R^2}$$

Излъчване на звездите. Светимост.

Звездите излъчват топлинно – спектърът им се описва приблизително с Планкова крива. Максимумът на топлинното излъчване с температура T е при дължина на вълната λ_{max} . По закона на Вин

$$\lambda_{max}T = 2.9 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

От закона на Вин следва, че по-горещите звезди са по-сини, а по-хладните – по-червени.

L – светимост на звезда. **Светимостта** на една звезда е количеството електромагнитна енергия, излъчено от звездата за единица време (мощност на излъчване) във всички посоки. Мери се във ватове [W] в SI.

Ако приемем, че звездата излъчва като абсолютно черно тяло, според **закона на Стефан-Болцман** единица повърхност от звездата излъчва с мощност, равна на σT^4 , където $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ е константа на Стефан-Болцман, а T е температурата на фотосферата (видимата повърхност) на звездата.

Тогава за звезда с радиус R :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Слънцето има радиус $R_{\odot} = 696\,000 \text{ km}$, фотосферна температура $T_{\odot} = 5770 \text{ K}$ и светимост $L_{\odot} = 3.8 \times 10^{26} \text{ W}$. За удобство обикновено мерим светимостите на звездите в L_{\odot} и радиусите им в R_{\odot} . Тогава можем да запишем закона на Стефан-Болцман във вида

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}} \right)^4$$

Плътност на лъчистия поток Φ : Това е количеството електромагнитна енергия, излъчено от звездата, което попада за единица време на разстояние r от нея върху единица площ, перпендикулярна на лъчите. В астрономически контекст обикновено се нарича просто „поток“ (подразбира се, че е на единица площ). Мери се във W/m^2 . Контекстово се среща и като „осветеност“.

Потокът на единица площ, създаван от източник на светлина на някакво разстояние от него, е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието: $\Phi \sim 1/r^2$.

Ако приемем, че излъчва еднакво във всички посоки, звезда със светимост L създава на разстояние r поток

$$\Phi = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Планета с радиус R поема потока Φ_0 от Слънцето с площта на проекцията си πR^2 , т.е светлината, която отразява за 1-ца време е с мощност

$$P = A\Phi_0\pi R^2$$

Бонд-албедото A (частта от енергията, която повърхността отразява) е число между 0 и 1 и зависи от повърхността на планетата.

Звездни величини. Формула на Погсън

m – видима звездна величина. **Видимата звездна величина** е мярка за видимия блясък на звездата, първоначално въведена от древногръцкия астроном Хипарх. Колкото по-ярка е звездата, толкова видимата ѝ звездна величина е по-малка. Най-слабите видими с просто око звезди са от звездна величина около 6 mag. Най-ярката звезда на нощното небе е Сириус (-1.46 mag). Петата най-ярка звезда е Вега (0.03 mag).

m_1, m_2 – видими звездни величини на две звезди

Φ_1, Φ_2 – потоци, които те създават за земния наблюдател

$$m_1 - m_2 = -2.5 \lg \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2} \right)$$

или

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = 10^{0.4(m_2 - m_1)} \approx 2.512^{(m_2 - m_1)}$$

1 mag по-малка звездна величина = 2.512 пъти по-ярка звезда

5 mag по-малка звездна величина = 100 пъти по-ярка звезда

M – абсолютна звездна величина. Абсолютната звездна величина е звездната величина, която звездата би имала, ако се намираще на разстояние 10 pc от нас.

Връзка между M и m на една звезда и разстоянието r до нея, в парсеци:

$$m - M = 5 \lg(r) - 5$$

Параметърът ($m - M$) се нарича модул на разстоянието.

Връзката е валидна при пренебрежима междузвездна екстинкция. Иначе междузвездната екстинкция (в mag) трябва да се добави от дясната страна на уравнението.

Връзка между светимостта L и **болOMETричната** абсолютна звездна величина M на звезда:

$$M = 4.75 - 2.5 \lg \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

или

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{0.4(4.75 - M)}$$

където 4.75 mag е болOMETричната абсолютна звездна величина на Слънцето, а L_{\odot} е светимостта на Слънцето.

Поток от звездата може да се измерва и само в отделни спектрални диапазони, използвайки филтри. Поради това, всяка звезда има много звездни величини – по една във всеки филтър (напр. B, V, R, J, H, K и т.н.). Всички звездни величини на Вега са 0.03 mag. Ако филтърът не е изрично упоменат, под “звездна величина” се подразбира тази във филтър V, т.е. визуалната.

Болометричната звездна величина характеризира светенето на звездата в целия електромагнитен спектър. Разликата между нея и визуалната (във филтър V) звездна величина се нарича „болометрична корекция“: $BC = m_{bol} - m_V$. За повечето звезди $BC < 0$. За спектрални класове F и G BC е най-близо до 0.

За планети, астероиди и комети в Слънчевата система абсолютна звездна величина се дефинира по друг начин: звездната величина, която тялото би имало, ако се намира на 1 ai и от Слънцето, и от наблюдателя, и е в пълна фаза.

Спектрални класове

O (сини звезди) – температура над ~30 000 К. Слаби водородни линии в спектърта. Йонизиран хелий. Маси за главната последователност: $>16M_{\odot}$.

B (синьо-бели звезди) – температура 10 000 – 30 000 К. Силни водородни линии в спектърта. Неутрален хелий. Маси за главната последователност: $2.1 - 16M_{\odot}$.

A (бели звезди) – температура 7500 – 10 000 К. Най-силни водородни линии в спектърта. Маси за главната последователност: $1.4 - 2.1M_{\odot}$.

F (бяло-жълти звезди) – температура 6000 – 7500 К. Средно силни водородни линии в спектърта. Линии на йонизирани метали. Много слаби линии на неутрални метали. Маси за главната последователност: $1.1 - 1.4M_{\odot}$.

G (жълти звезди) – температура 5200 – 6000 К. Средно силни водородни линии в спектърта. Линии на Ca II и др. йонизирани метали. Засилват се неутралните метали. Маси за главната последователност: $0.8 - 1.1M_{\odot}$.

K (оранжеви звезди) – температура 3700 – 5200 К. Слаби водородни линии в спектърта. Линии на неутрални метали (Fe, Si). Маси за главната последователност: $0.5 - 0.8M_{\odot}$.

M (червени звезди) – температура 2500 – 3700 К. Слаби водородни линии в спектърта. Молекулни абсорбционни ивици. Маси за главната последователност: $0.1 - 0.5M_{\odot}$.

Други спектрални класове, които се използват в специални случаи са:

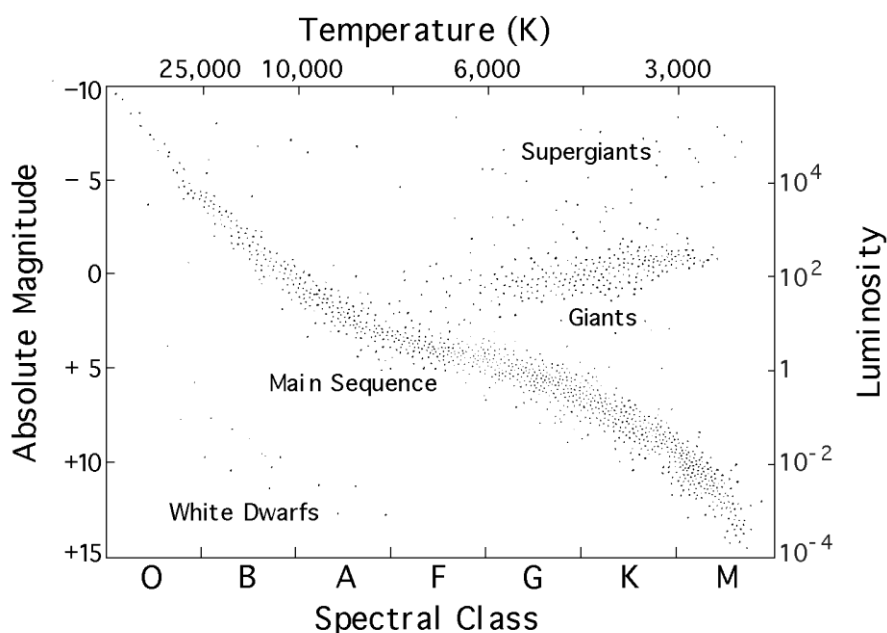
- **W** за Волф-Райе звезди (масивни сини звезди със силни звездни ветрове и атмосфера от азот/въглерод).
- **C** за хладни въглеродни звезди
- **D** за бели джуджета – звездни остатъци от изроден газ.

За **кафяви джуджета** са дефинирани спектрални класове **L** (1400 – 2400 К), **T** (600 – 1400 К) и **Y** (< 600 К). Кафявите джуджета са междинен клас обекти между звезди и планети. Границата между планета и кафяво джудже е $\sim 13M_J$, а между кафяво джудже и звезда – около $80 M_J$.

Слънчевата маса е $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}$ kg.

Юпитеровата маса е $M_J = (1/1047) M_{\odot}$.

Диаграма на Херцшпрунг-Ръсел



Звездна еволюция

Еволюцията на единична звезда зависи основно от началната ѝ маса. Разделя се на три етапа:

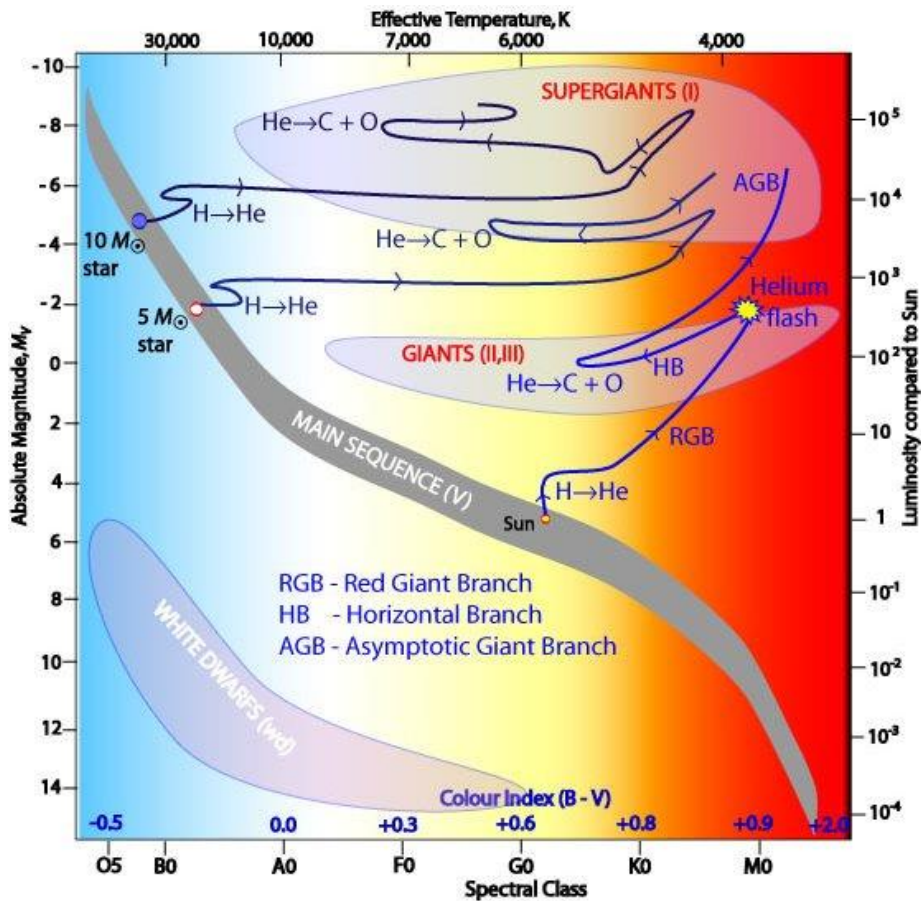
- **преди Главната последователност** – звездообразуването, от част от молекулярен облак, през гравитационно свиване до протозвезда, до запалване на термоядрения синтез в ядрото. Минималната възможна маса за образуване на звезда е $0.08 M_{\odot}$. По-маломасивните обекти стават кафяви джуджета – нереализирани звезди.
- **на Главната последователност** – в този етап в ядрото на звездата водород се синтезира в хелий-4
За звездите на Главната последователност важи полуемпиричната зависимост

$$L \propto M^{3.5}$$

От тук, времето за престой на Главната последователност е приблизително

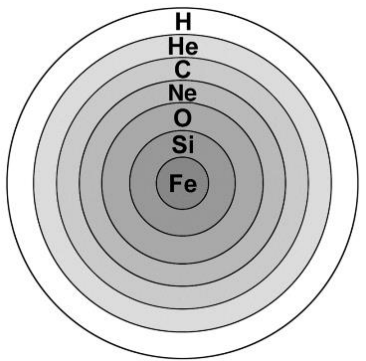
$$t_{MS} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2.5} \times 10^{10} \text{ yr}$$

- **след Главната последователност** – звездата се раздува и охлажда до червен гигант. След това еволюцията може да завърши по два основни начина:
 - Звездите с маса над $8 M_{\odot}$ синтезират в големи количества елементи до желязо, след което избухват като свръхнови с колапс на ядрото. Остатъците им могат да бъдат неутронни звезди или черни дупки (с маси над $\sim 3M_{\odot}$).
 - Звездите с маса под $8 M_{\odot}$ синтезират в големи количества елементи до кислород и завършват живота си в края на AGB-стадия, когато външните слоеве се отделят и за кратко ($\sim 10^4$ – 10^5 yr) образуват планетарна мъглявина. Остатъците на тези звезди са бели джуджета (маса под $1.44M_{\odot}$ – **граница на Чандрасекар**).



Вляво: Еволюционни трекове на звезди с начална маса 1, 5 и 10 слънчеви маси по диаграмата на Херцшпрунг-Ръсел.

Долу: Структурата на ядрото на масивна звезда непосредствено преди избухването на свръхнова.



Строеж на звездите

В ядрото протича термоядрен синтез. Произведената енергия се пренася към повърхността чрез два механизма: конвекция и лъчист пренос.

- В звездите с маса $< 0.3 M_{\odot}$ има само конвективна зона.
- В звездите с маса $0.3 - 1.5 M_{\odot}$ има вътрешна зона на лъчист пренос и външна конвективна зона.
- В звездите с маса $> 1.5 M_{\odot}$ има вътрешна конвективна зона и външна зона на лъчист пренос.

4. Извънгалактична астрономия. Космология.

Млечния път

Млечният път е голяма спирална галактика с бар (тип SBb), с ефективен диаметър ~30 000 pc, съдържаща между 100 и 400 милиарда звезди. Слънчевата система се намира на разстояние $r_{GC} = 8200$ pc от центъра на Галактиката и обикаля около него със скорост $v_S = 230$ km/s, правейки една обиколка за време

$$T = \frac{2\pi r_{GC}}{v_S} \approx 220 \times 10^6 \text{ yr}$$

Към 2023 г. в Млечния път са открити ~160 кълбовидни звездни купа, над 2000 разсеяни звездни купа и над 3000 планетарни мъглявини. В Млечния път вероятно избухва свръхнова на всеки ~50 години, въпреки че от 1000 г. досега са наблюдавани само четири такива. Основните компоненти на Млечния път са типични за спирална галактика:

- **диск** (с характерна дебелина 300-400 pc), където има звездообразуване и най-голям процент млади сини звезди
- **балдж** (централна издута част), в чийто център е ядрото със свръхмасивна черна дупка с маса 4.2 милиона слънчеви маси
- **галактично хало**, съставено предимно от стари звезди и кълбовидни купове
- предполагаемо **хало от тъмна материя**

Местната група

Местната група е малкият гравитационно свързан куп от галактики, в който се намираме. Има размер ~3 Mpc и съдържа над 80 галактики, вкл.

- **Андромеда (M31)**, ефективен размер 47 000 pc) и спътниците ѝ (над 30 на брой малки галактики, вкл. M32, M110).
- **Млечния път** (втори по големина) и спътниците му (над 40 малки галактики, вкл. Големия Магеланов облак и Малкия Магеланов облак).
- **Галактиката Триъгълник (M33)**, ефективен размер 19 000 pc).
- други малки гравитационно свързани галактики, вкл. неправилните галактики IC 10, IC 1613, NGC 6822

Местната група е част от галактичния свръхкуп Дева с размер над 30 Mpc и съдържащ над 100 подобни галактични групи. Наблюденията показват, че на космически скали, обхващащи много такива свръхкупове (>150 Mpc) Вселената е приблизително хомогенна. **1 Mpc (мегапарсек) = 10^6 pc.**

Типове галактики

Класификацията на галактиките, която ползваме в наши дни, е разработена от Едуин Хъбъл. Големите галактики се делят основно на два типа:

- **Спирални** – със спирални ръкави и дискове, съдържащи газ и прах с активно звездообразуване. Имат подобни компоненти като Млечния път.
- **Елиптични** – елипсоидални по форма и съставени почти изцяло от звезди, без газ и прах. В тях няма активно звездообразуване.

Междинен, по-рядък клас са **лещовидните** галактики.

Неправилните галактики нямат ясно изразена геометрична форма.

Стандартни свещи. Цефеиди

Цефеидите са пулсиращи променливи звезди. Те са свръхгиганти с много висока светимост и се наблюдават на големи разстояния. Могат да се различат като отделни звезди в други галактики на разстояния над 50 Мрс. Периодът им на изменение на блясъка P е толкова по-голям, колкото по-голяма е светимостта им L (зависимостта $\log L$ ($\log P$) е линейна). Тази закономерност е изучена и може да се използва за определяне на разстоянията до цефеидите. Периодът на дадена цефеида се определя от наблюдения. От зависимостта период-светимост, получена въз основа на други наблюдавани цефеиди, по периода на цефеидата се определя нейната светимост L . От светимостта ѝ може да се изчисли абсолютната ѝ звездна величина M . Измерва се видимата звездна величина на цефеидата m и по формулите, дадени в раздела за звезди, се изчислява разстоянието до нея r . По него може да се съди и за разстоянието до галактиката, в която се намира цефеидата. Методът е разработен от Хенриета Ливит.

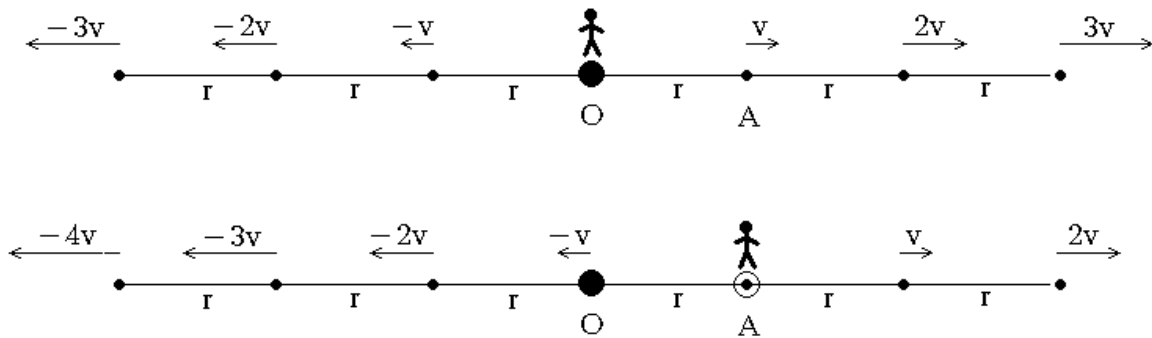
Хъбъл е пресметнал разстоянията до други галактики за пръв път по метода на цефеидите, но в наши дни има няколко начина за пресмятане на разстояния до близки галактики, вкл. чрез разпределения на червените гиганти и на планетарните мъглявини в тях. Подобни обекти, чиято очаквана светимост може да бъде използвана за изчисляване на разстояния в космоса, се наричат „стандартни свещи“.

Закон на Хъбъл

Ако галактика се намира на разстояние r (в pc) от нас, поради разширението на Вселената, тя се отдалечава от нас със скорост:

$$v = H_0 r$$

където v е в km/s, $H_0 = 70$ (km/s)/Мрс е константата на Хъбъл. Тъй като наблюдаваме далечните галактики в миналото, законът на Хъбъл не е приложим в тази си форма за пресмятане на разстояния над ~ 1000 Мрс по червено отместване.



O - нашата Галактика, A - друга галактика

С малки кръгчета са означени галактики, отдалечени на еднакви разстояния r една от друга. Съгласно закона на Хъбъл при увеличение на разстоянието от нас до обекта 2, 3, 4, . . . пъти, неговата скорост на отдалечаване от нас също се увеличава съответно 2, 3, 4, . . . пъти. Затова не съществува център на Вселената, от който да става разширението. Разширението на Вселената изглежда по еднакъв начин, независимо от коя точка на Вселената го наблюдаваме - дали от нашата Галактика O или от друга галактика A.

Ако върнем времето назад, цялата Вселена е била свита в една точка. При постоянна скорост на разширение $v = \text{const}$ това е било преди т.нар. Хъбболово време

$$t_H = \frac{r}{v} = 1/H_0 \approx 14 \times 10^9 \text{ yr}$$

Според най-добрите съвременни космологични модели Вселената не се е разширявала линейно, но възрастта ѝ е близо до Хъбболовото време: $\sim 13.8 \text{ Gyr}$ (милиарда години). Наблюденията на далечни галактики не са единственото свидетелство за това. Възрастта на ~ 150 кълбовидни звездни купа в Млечния път е определена сравнително точно по диаграмата на Херцшпрунг-Ръсел. Всички те, с изключение на няколко по-млади, са на възраст между 9 и 14 милиарда години.

Тъмна материя

Според теоремата за вириала в стабилни, релаксирани гравитационно свързани системи общата кинетична енергия е $1/2$ от общата гравитационна потенциална енергия по модул, също както при обектите на кръгови орбити:

$$E_K = -\frac{1}{2} E_P$$

Наблюдава се, че скоростите на отделни галактики в куповете от галактики са твърде високи, за да може куповете да бъдат стабилни по този критерий, ако цялата материя в тях е тази, която наблюдаваме. Също така, скоростите на въртене на отделните галактики са твърде високи в перифериите: вместо да спадат с разстоянието, както очакваме, те са константни за голям интервал от разстояния до центъра на галактиката. Обяснението е, че в тези гравитационно свързани системи има огромни количества материя, която не излъчва. Не е наблюдавано тази материя да взаимодейства по друг начин, освен гравитационно. Тя е кръстена **тъмна материя**.

Критична плътност и тъмна енергия

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-26} \text{ kg/m}^3$$

където $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [m}^3\text{kg}^{-1}\text{sec}^{-2}\text{]}$ е гравитационната константа. Ако действителната средна плътност на материята във Вселената е по-малка или равна на ρ_c , то Вселената вечно ще се разширява. Това означава, че гравитационните сили, упражнявани от тази материя, няма никога да са способни да спрат разширението на Вселената, което става по инерция в резултат на началния тласък, даден от Големия взрив. Ако действителната средна плътност на материята във Вселената е по-голяма от ρ_c , то в бъдеще трябва да настъпи момент, когато разширението на Вселената ще спре и тя да започне да се свива. Към 2023 г. се счита, че Вселената се разширява с ускорение, което се обяснява с т.нар. **тъмна енергия**. Ключово свидетелство за това са свръхновите от тип Ia, които се използват за стандартни свещи на космологични разстояния.

Мащабен фактор и космологични модели

Все още не знаем точно как се е разширявала Вселената с времето. Начинът това да се опише е чрез т.нар. мащабен фактор

$$a(t) = r/r_0$$

където r е разстоянието между две отдалечени галактики на възраст на Вселената t , а r_0 е сегашното разстояние между тях. Различни космологични модели допускат различни относителни тежести на тъмната материя, тъмната енергия и кривината на пространството, поради което дават различни функции $a(t)$. Тъй като наблюдаваме далечните галактики назад в миналото (заради крайната скорост на светлината), истинските настоящи разстояния до тях също зависят от космологичния модел. Единственият сигурен, директно наблюдаем параметър на далечните галактики е червеното отместване z . Мащабният фактор за възрастта на Вселената, на която наблюдаваме дадена галактика, и червеното ѝ отместване, са пряко свързани:

$$a = \frac{1}{1+z}$$

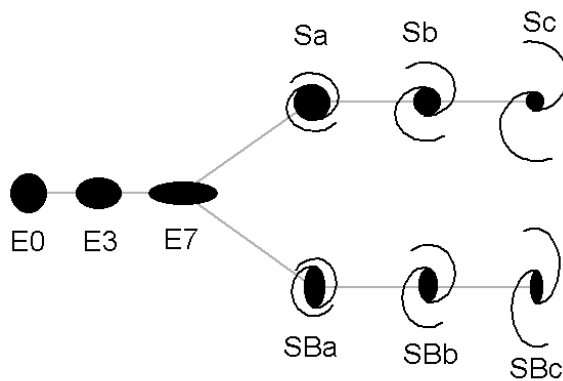
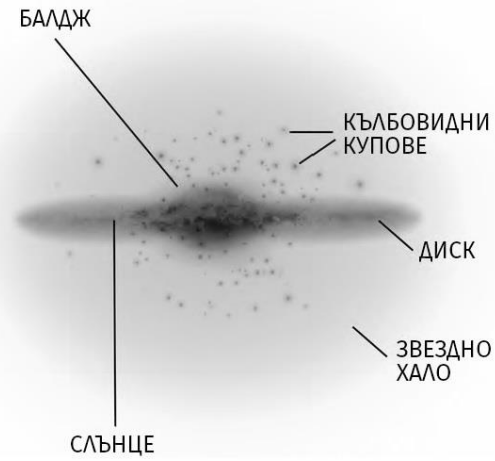
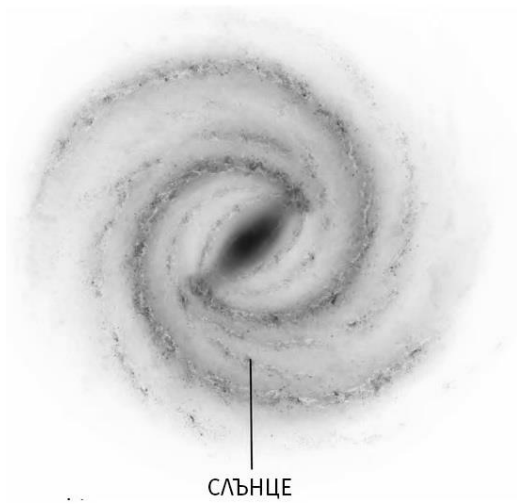
За галактика на голямо z при даден космологичен модел могат да се пресметнат няколко разстояния:

- **истинско разстояние** в момента (разстояние в съпътстваща отправна система) – реалното разстояние между нашата галактика и наблюдаваната галактика при сегашната възраст на Вселената (а не в миналото, където я наблюдаваме)
- **разстояние на ъгловия размер** – разстоянието r като параметър във формулата
$$\delta = d/r$$
- **разстояние на светимостта** – разстоянието r като параметър във формулата
$$\Phi = \frac{L}{4\pi r^2}$$
- **изминат път от светлината** – времето, с което виждаме обекта назад в историята, умножено по c

За малки червени отмествания ($z \ll 1$) всички тези разстояния имат еднаква стойност. Към 2023 г. вече са открити няколко предполагаеми галактики на $z > 10$, както и потвърден квазар (активно галактично ядро) на $z = 7.6$.

Космически микровълнов фон

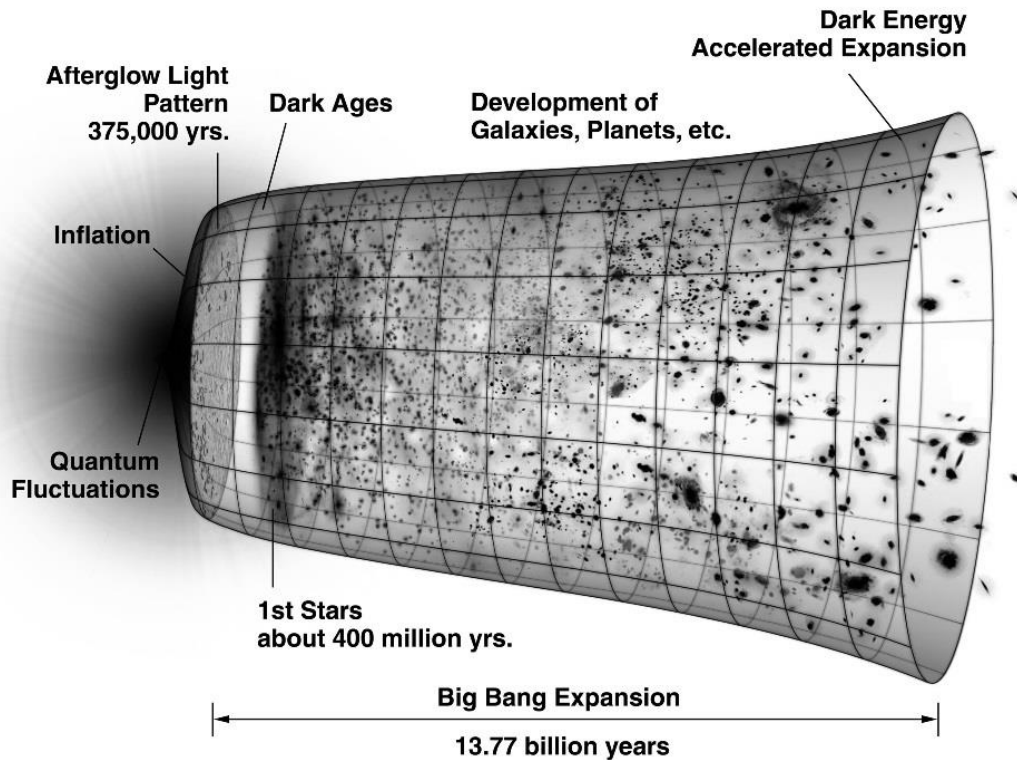
Най-далечната светлина, която засичаме от космоса, е и най-ранната. Космическият микровълнов фон (СМВ) е лъчение в микровълни, идващо от всички посоки от космоса, открито през 1965 г. През 1992 г. е получен спектърът му – перфектна Планкова крива с температура 2.7 К. Това е освободена светлина от епохата на рекомбинацията, когато електроните и протоните във Вселената масово са се свързали във водородни атоми и изключително плътната Вселена е станала прозрачна за светлината. Според най-добрите модели това се е случило ~380 000 уг след Големия взрив и го наблюдаваме на червено отместване $z = 1100$. В такъв случай температурата на всяка една точка от Вселената тогава е била минимум $2.7 \times 1100 = 3000$ К.



Горе: Структурата на Млечния път – типична за спиралните галактики

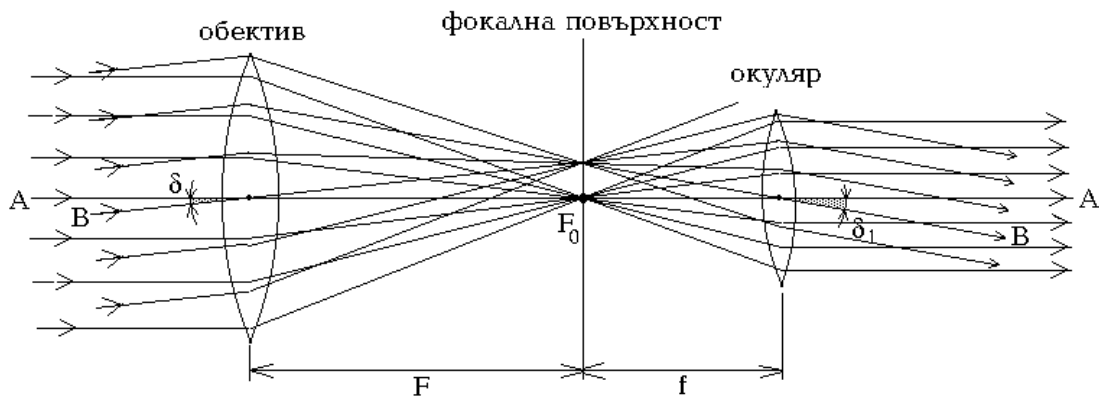
Среда: Камертонната диаграма на Хъбъл, илюстрираща морфологичната класификация на големите галактики

Долу: Кратка история на Вселената.



5. Телескопи

F, f - Фокусни разстояния на обектива и на окуляра на телескопа

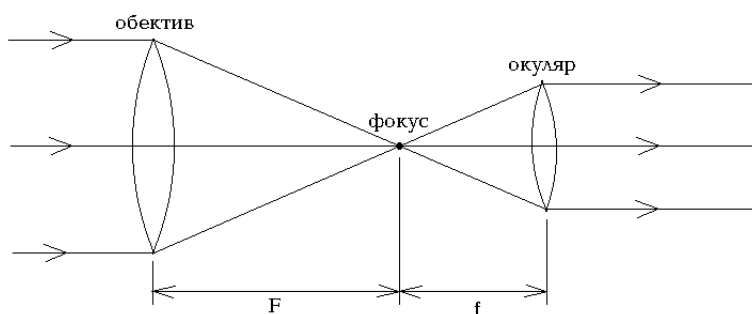


Две звезди А и В са на ъглово разстояние δ една от друга. Те са много далеч от нас. Затова от всяка звезда върху обектива на телескопа попада успореден сноп светлинни лъчи. Нека телескопът е насочен точно към звездата А. Светлинният сноп лъчи, идващ от нея, е успореден на оптическата ос на телескопа. Пречупвайки се от обектива, той се събира в главния фокус F_0 . Светлинният сноп от звездата В е наклонен на ъгъл δ към снопа от звездата А и към оптическата ос на телескопа. Той се събира в друг фокус, лежащ на фокалната повърхност на обектива. След преминаването си през окуляра светлинните лъчи от А и от В отново стават успоредни снопове светлина. Те сключват помежду си ъгъл $\delta_1 > \delta$. Видимото ъглово разстояние между звездите се увеличава при визуално наблюдение с телескоп.

δ може да е също видимият ъглов размер на далечен обект.

Увеличение на телескопа:

$$M = \delta_1 / \delta = F / f$$



Телескопът е насочен към една звезда, от която върху обектива попада успореден сноп светлина. Той създава върху обектива поток на единица площ Φ . Общата мощност на светлинния поток, попадащ върху обектива, е:

$P = \pi D^2 \Phi / 4$, където D е диаметърът на обектива.

Той теоретично е равен на мощността, излизаща от окуляра, и попадаща в окото на наблюдателя. Светлинният сноп, излизащ от окуляра, е по-концентриран. Потокът на единица площ, създаван в окото на наблюдателя, е:

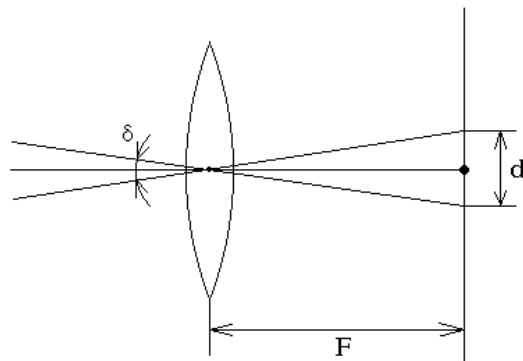
$\Phi_1 = 4P / \pi D_1^2$, където D_1 е диаметърът на окуляра. Следователно $\Phi_1 = \Phi \times D^2 / D_1^2$. Ето защо звездата, наблюдавана през телескоп, се вижда D^2 / D_1^2 пъти по-ярка, отколкото когато я гледаме с просто око (в случай че изходният отвор на окуляра е с

размера на зеницата на окото). Така с телескоп могат да се виждат звезди, които са по-слаби по блясък от най-слабите видими с просто око звезди.

Проникващата способност на телескопа се характеризира със звездната величина на най-слабите звезди, видими през него:

$$m_{\text{lim}} = 7.5 + 5 \lg D \text{ [cm]}$$

където D е диаметърът на обектива в сантиметри.



Мащаб на изображенията на обектите:

Ако във фокалната плоскост на обектива на телескопа поставим фотоплака (или CCD камера), и наблюдаваме обект с ъглов размер δ , полученото на фотоплаката изображение на обекта ще има линеен размер:

$$d = \delta F,$$

в случай, че δ е в радиани, или

$$d = \delta'' F / 206265,$$

в случай че δ е в ъгли секунди, а F е фокусното разстояние на обектива на

телескопа, изразено в същите мерни единици, както d .

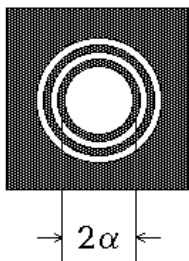
Относителен отвор и светлосила: Осветеността, която един протяжен обект създава във фокалната повърхност на обектива на телескопа, е пропорционална на $(D/F)^2$, където D и F са съответно диаметърът и фокусното разстояние на обектива. Затова величината:

$$A = D/F,$$

наречена относителен отвор на обектива на телескопа, е важна негова характеристика. Телескопите с голям относителен отвор са подходящи за наблюдение и фотографирание на мъгляви обекти, като мъглявини, галактики, комети и др.

Разделителната способност на телескопа се характеризира с най-малкото ъглово разстояние между два обекта, при което те могат да се наблюдават като отделни един от друг с телескопа.

Поради огромните разстояния до звездите, с нашите телескопи ние ги наблюдаваме като точкови източници на светлина. Изображението на една звезда във фокалната повърхност на обектива на телескопа, обаче, не е точка.



Дифракцията на светлината (изкривяването на светлинните лъчи, минаващи близо до външната граница на обектива) е причина то да се получава като светъл кръг с редуващи се концентрични тъмни и светли пръстени около него. Те могат да се видят със силно увеличение при наблюдение с малък телескоп. При големите телескопи подобна дифракционна картина не може да се види поради влиянието на турбулентните движения на въздуха в земната атмосфера. Светлият кръг се нарича дифракционен диск или диск на Ейри и неговият ъглов радиус α се приема за величина, характеризираща разделителната

способност на телескопа. Образите на всички звезди, наблюдавани с един телескоп, са дифракционни дискове с еднакви размери. Тези размери зависят само от телескопа и нямат нищо общо с действителните размери на звездите. Минималното ъглово

разстояние между две звезди, които могат да бъдат различени като отделни с телескопа, е от порядъка на α .

За светлинните вълни с различни дължини α е различен, като най-малък е за най-късите вълни, а най-голям - за най-дългите. Разделителната способност на телескопа е по-добра за по-късите вълни, отколкото за по-дългите.

$$\alpha [\text{rad}] = 1.22\lambda/D,$$

където D е диаметърът на обектива на телескопа, изразен в същите мерни единици, както λ , а λ е дължината на светлинните вълни.

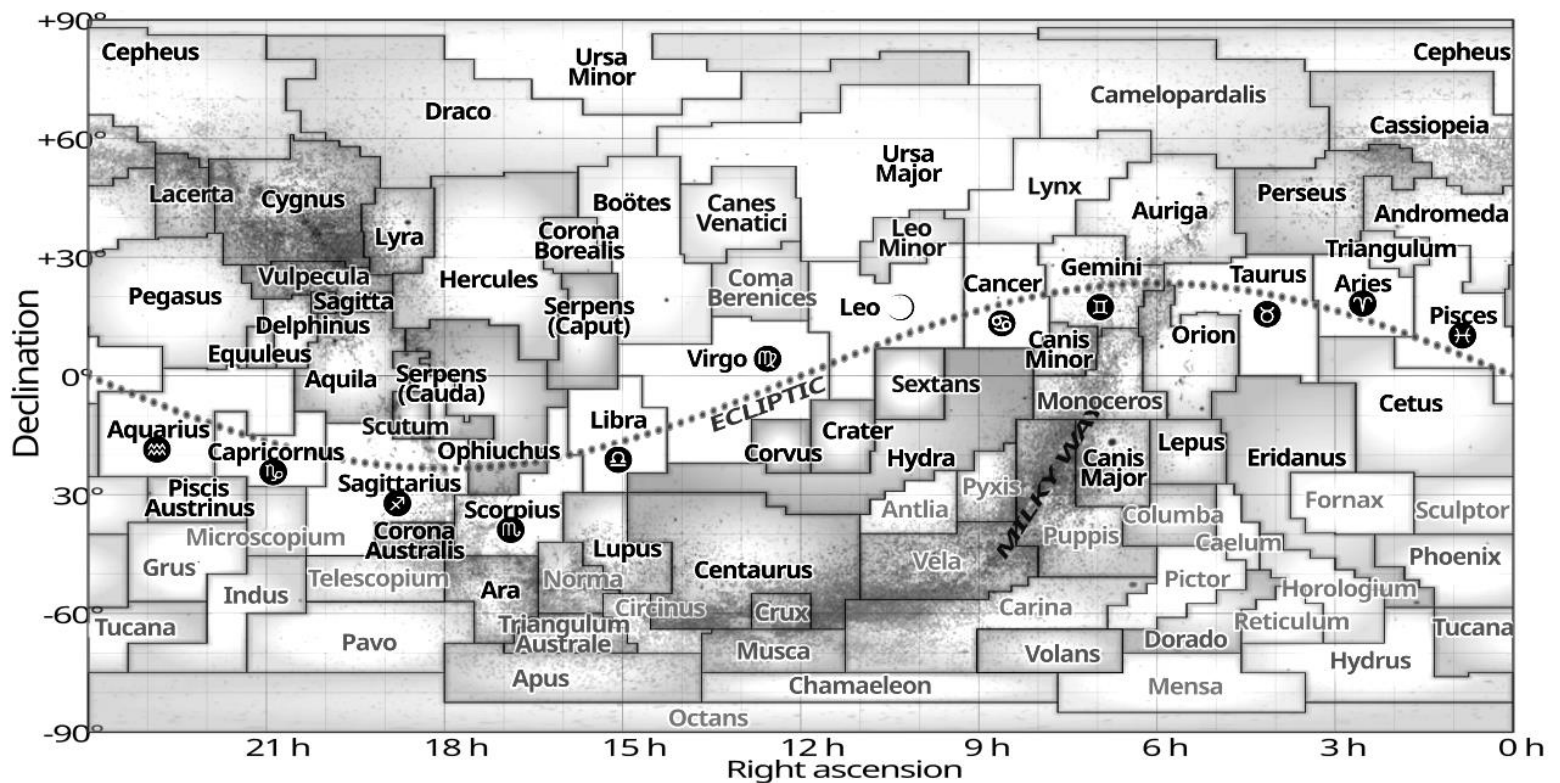
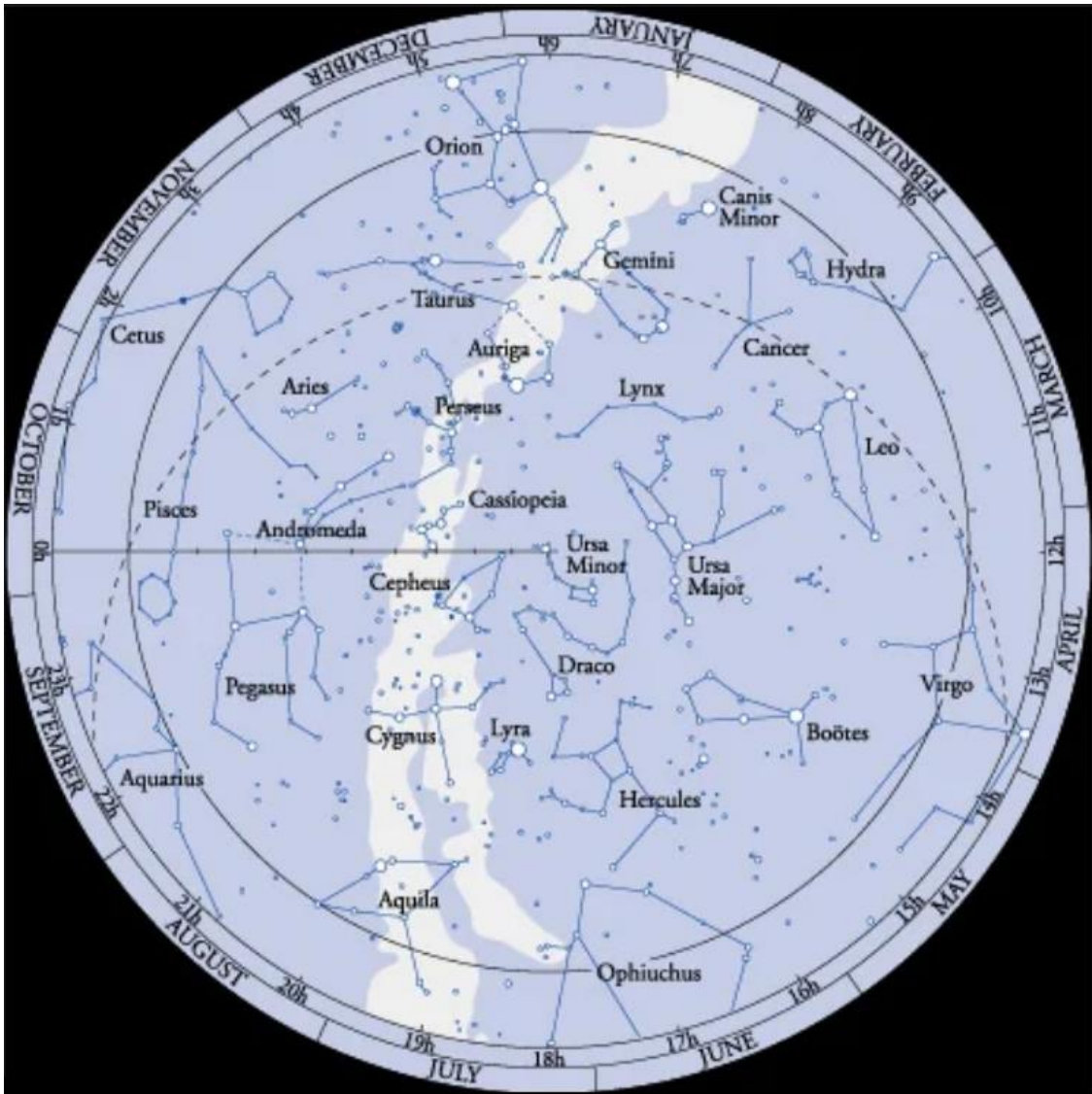
Ако α е в ъглови секунди, D - в cm, а $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ (ангстрьома; $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$), то: $\alpha'' = 14 / D$, което се приема за характеристика на разделителната способност на телескопа във видима светлина.

Разделителната способност на човешкото око е около $2'$ (2 ъглови минути). Поради турбулентните движения на въздушни маси с различна плътност изображенията на обектите, наблюдавани с телескоп, се изкривяват и размиват. Влиянието на атмосферата ограничава разделителната способност на наземните телескопи до около $1''$. Това означава, че и най-големите наземни телескопи, макар да имат много добра теоретична разделителна способност, на практика далеч не могат да я достигнат, а работят с разделителната способност на средно големи любителски телескопи. По-големи успехи се постигат чрез използване на адаптивна оптика или спекл-интерферометрия.

Приложение 1: Най-ярките звезди по небето

	Име на звезда	Байерово обозначение	Видима звездна величина (V)	r (ly)	Сп. клас
0	Слънце	-	-26.74	0	G2 V
1	Сириус	α Canis Majoris	-1.46	8.6	A0 V, DA2
2	Канопус	α Carinae	-0.74	310	A9 II
3	Ригил Кентаурус + Толиман	α Centauri	-0.27 (0.01 + 1.33)	4.3	G2 V, K1 V
4	Арктур	α Boötis	-0.05	37	K0 III
5	Вега	α Lyrae	0.03 (-0.02-0.07var)	25	A0 Va
6	Капела	α Aurigae	0.08 (0.03-0.16var)	43	K0 III, G1 III
7	Ригел	β Orionis	0.13 (0.05-0.18var)	860	B8 Ia
8	Процион	α Canis Minoris	0.34	11	F5 IV-V
9	Ахернар	α Eridani	0.46 (0.40-0.46var)	140	B3 V
10	Бетелгейзе	α Orionis	0.50 (0.0-1.6var)	640	M1-M2 I
11	Хадар	β Centauri	0.61	390	B1 III
12	Алтаир	α Aquilae	0.76	17	A7 V
13	Акрукс	α Crucis	0.76 (1.33 + 1.73)	320	B0.5 IV, B1 V
14	Алдебаран	α Tauri	0.86 (0.75-0.95var)	65	K5 III
15	Антарес	α Scorpii	0.96 (0.6-1.6var)	550	M1.5 I, B2.5 V
16	Спика	α Virginis	0.97 (0.97-1.04var)	250	B1 III, B2 V
17	Полукс	β Geminorum	1.14	34	K0 III
18	Фомалхаут	α Piscis Austrini	1.16	25	A3 V
19	Денеб	α Cygni	1.25 (1.21-1.29var)	2600	A2 I
20	Мимоза	β Crucis	1.25 (1.23-1.31var)	280	B0.5 III, B2 V
21	Регул	α Leonis	1.39	79	B8 IV
22	Адара	ϵ Canis Majoris	1.5	430	B2 II

Приложение 2: Екваториалната, еклиптичната и галактичната равнини на фона на съзвездията, в различни проекции



Приложение 3: Някои математически формули

Ъгли:

$$\alpha^{\circ} = \alpha^{\text{rad}} \times 180/\pi$$

$$\alpha^{\text{rad}} = \alpha^{\circ} \times \pi/180$$

Тригонометрични функции:

$$\sin \alpha = a/c$$

$$\cos \alpha = b/c$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a/b$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = b/a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

Логаритми:

$$a = b^c \text{ - степенуване}$$

$$b = \sqrt[c]{a} \text{ - коренуване}$$

$$c = \log_b a \text{ - логаритмуване}$$

$$b \text{ - основа, } a \text{ - степен}$$

$$c \text{ - степенен показател}$$

$$\log_{10} x = \lg x \text{ - обозначение на десетичен логаритъм}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

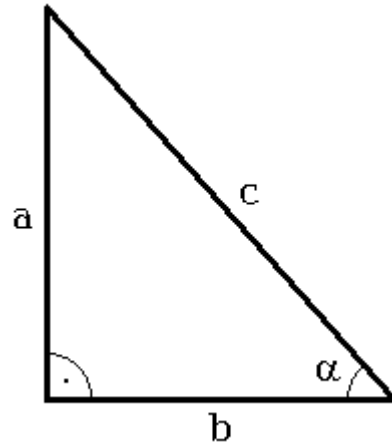
$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Забележка:

$$\log_a (x+y) \neq \log_a x + \log_a y !$$

Израз от този вид не може да се опрости по подобен начин!



Формули за приближено изчисление:

Ако $\alpha \ll 1 \text{ rad}$, то:

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha [\text{rad}]$$

Ако $x \ll 1$, то:

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

или в частност:

$$(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2$$

$$1/(1+x)^{1/2} \approx 1-x/2.$$