

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XXVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Областен кръг на олимпиадата по астрономия
25 февруари 2024 г.
Възрастова група VII-VIII клас – решения

1 Задача. Черни дупки. За да се превърне едно тяло с маса M в черна дупка, цялата му маса трябва да бъде събрана в сфера с радиус, който се нарича радиус на Шварцшилд. Той се пресмята по формулата:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

където $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ е гравитационната константа, а $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ е скоростта на светлината.

- **А)** Пресметнете радиуса на Шварцшилд за човек с маса 80 kg. Намерете отношението на този радиус към радиуса на електрона, който е $1.4 \times 10^{-15} \text{ m}$.
- **Б)** Пресметнете радиуса на Шварцшилд за планетата Земя. Сравнете го по размер с някакъв познат и привичен за вас предмет или обект.
- **В)** Пресметнете радиуса на Шварцшилд за нашата галактика Млечен път, чиято маса е 10^{12} пъти по-голяма от масата на Слънцето. Изразете този радиус в километри, в астрономически единици и в светлинни години.
- **Г)** Намерете масата (в единици слънчеви маси) на черната дупка, която се намира в центъра на нашата галактика Млечен път. Нейният радиус е 12 милиона километра.

Справочни данни:

Маса на Земята – $6 \times 10^{24} \text{ kg}$

Маса на Слънцето – $2 \times 10^{30} \text{ kg}$

Астрономическа единица – $149.6 \times 10^6 \text{ km}$

Светлинна година – $9.46 \times 10^{12} \text{ km}$.

Решение:

А) Нека да означим масата на човека с m . Съгласно дадената ни в условието формула, радиусът на Шварцшилд, който съответства на тази маса, е:

$$R_S = \frac{2Gm}{c^2} \approx 1,2 \cdot 10^{-25} \text{ m}$$

Този радиус е около 10^{10} пъти по-малък от дадения ни размер на електрона. Явно не е лесно да направим черна дупка от човек ☹️.

Б) Аналогично, ако M_3 е масата на Земята, то нейният радиус на Шварцшилд е:

$$R_S = \frac{2GM_3}{c^2} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Виждаме, че за да превърнем Земята в черна дупка трябва да я свием до радиус около 9 mm. Това е сравнимо с някои малки предмети, с които се срещаме в нашия всекидневен живот, например: топче за игра (топче от мишка ☹️), орех, капачка от бутилка и т.н.

В) Нека с M_{MW} да означим масата на Млечния път. Първо пресмятаме масата на нашата Галактика в килограми:

$$M_{MW} = 10^{12} \cdot M_{\text{Сл}} = 2 \cdot 10^{42} \text{ kg}.$$

Оттук получаваме, че радиусът, до който трябва да свием Млечния път, за да се превърне той в черна дупка, е:

$$R_S = \frac{2GM_{MW}}{c^2} \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ m} = 3 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Използвайки получената стойност, намираме:

- в астрономически единици:

$$R_S = \frac{3 \cdot 10^{12} \text{ km}}{149,6 \cdot 10^6 \text{ km}} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ au}$$

- в светлинни години:

$$R_S = \frac{3 \cdot 10^{12} \text{ km}}{9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}} \approx 0,31 \text{ ly}$$

Г) Нека с R да означим радиуса на черната дупка в центъра на Млечния път. Ако търсената маса е M , то:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Оттук намираме:

$$M = \frac{Rc^2}{2G} \approx 8,1 \cdot 10^{36} \text{ kg}$$

Като превърнем тази маса в единици маси на Слънцето, получаваме:

$$M \approx 4,05 \cdot 10^6 M_{\text{Сл}}$$

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

А) – 2т

- За правилен израз за радиуса на Шварцшилд и вярно получена числена стойност – 1т.
- За вярно сравнение на този радиус с размера на електрона – 1т.

Б) – 2т

- За правилен израз за радиуса на Шварцшилд на Земята и вярно получена числена стойност – 1т
- За сравнение с някакъв обект от всекидневието – 1т.

В) – 5т

- За превръщане на масата на Млечния път в килограми – 1т.
- За правилен израз за радиуса на Шварцшилд и вярно получена стойност в метри и километри – 2т.
- За превръщане на получения радиус в астрономически единици – 1т.
- За превръщане на получения радиус в светлинни години – 1т.

Г) – 3т.

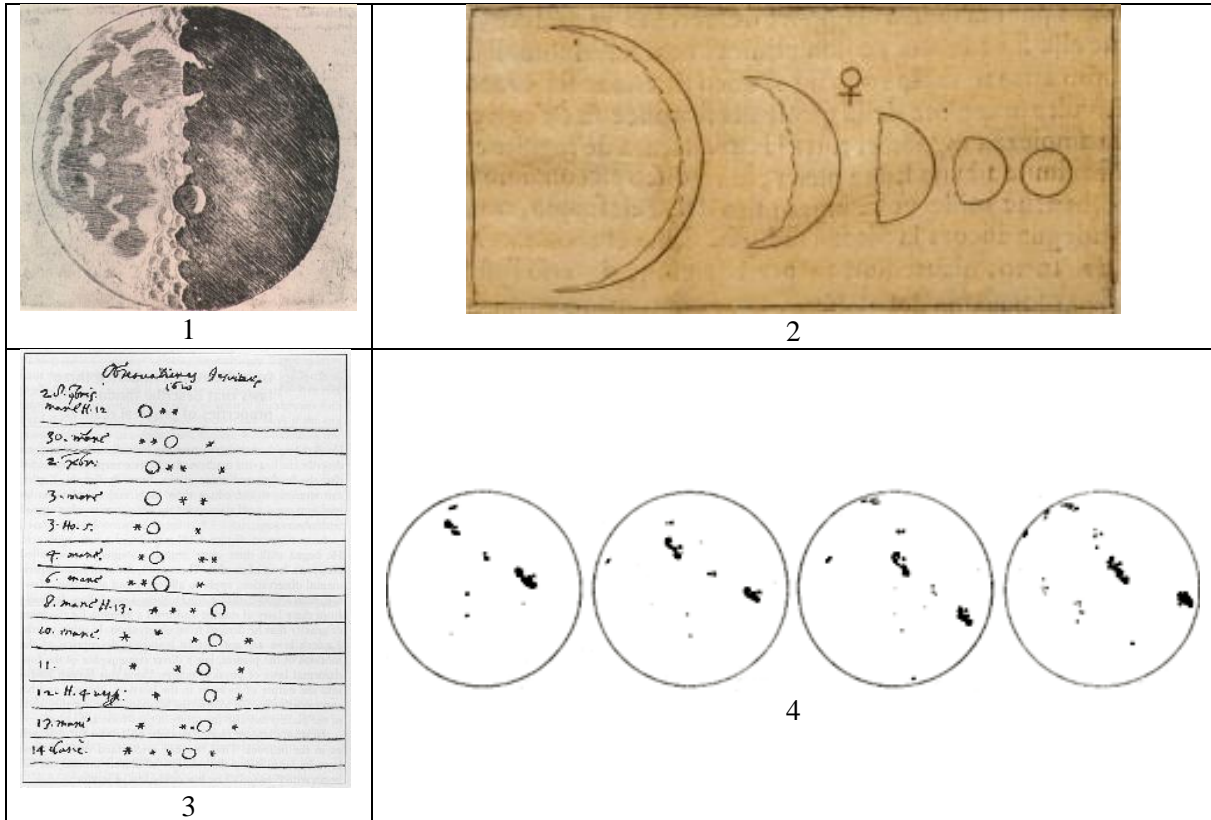
- За правилен израз за масата на черната дупка и вярно получена стойност – 2т.
- За правилно превръщане в слънчева маса – 1т.

2 задача. Галилео Галилей. Знаменитият италиански учен Галилео Галилей е живял в XVII век, когато сред научната общност е господствала идеята за геоцентричния модел на света. Галилео Галилей е конструирал първия телескоп и е направил наблюдения, които са послужили в пряка подкрепа на хелиоцентричната система със следните аргументи:

- А) Освен Земята, има и друг обект в Слънчевата система, който се върти около оста си;
- Б) Земята не е единственото тяло, около което могат да обикалят други космически тела;

- В) Най-близкият до нас космически обект не е кристална сфера, а тяло със скалиста повърхност;
- Г) Най-ярката видима в небето планета се осветява от Слънцето и показва различни фази.

Разгледайте дадените ви рисунки, направени от самия Галилео Галилей. За всяка от рисунките отговорете какъв космически обект е изобразен и кой от посочените аргументи се потвърждава от нея. Дайте кратко обяснение, не по-дълго от 3-4 изречения за всяка картинка.



Решение:

На рисунка 1 е изобразена Луната. По времето на Галилео Галилей все още е господствала идеята от времето на древните гърци, според която небесните тела се състоят от ефирна материя – различна от всякакви видове вещества, които се срещат на Земята. За Луната, като най-близко до нас тяло, най-много се е допускало, че е кристална сфера. Наблюденията на Галилей показват, че тя е със скална повърхност и е тяло подобно на Земята (аргумент В).

На рисунка 2 са представени различните фази, които планетата Венера показва, когато се намира в различни положения спрямо Земята и Слънцето. Също така са отразени различните видими ъглови размери на Венера при различните разстояния, на които планетата може да се намира от Земята в тези различни положения. Това показва, че Венера свети с отразена от Слънцето светлина и се движи около него (аргумент Г).

На рисунка 3 са дадени зарисовки на Юпитер и неговите четири най-големи спътници, наблюдавани от Галилео Галилей на различни дати. Те показват, че Юпитер е още един обект, различен от Земята, около който могат да обикалят други космически тела (аргумент Б).

На рисунка 4 са представени зарисовки на Слънцето със слънчеви петна. Рисунките явно са подредени в хронологичен ред и изместването на петната показва, че Слънцето е още един космически обект, който се върти около оста си (аргумент А).

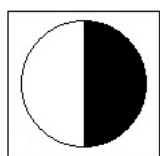
Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилни названия на обектите – $4 \times 1 \text{ т.} = 4 \text{ т.}$

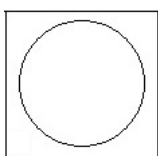
За правилно посочване кои аргументи се подкрепят от тези наблюдения и кратко обяснение – $4 \times 2 \text{ т.} = 8 \text{ т.}$

3 Задача. Рисунки на Луната. В началото на 2019 г. известният български астроном Александър Куртенков планира поредните си наблюдения с 2-метровия телескоп в Националната астрономическа обсерватория (НАО) Рожен. Стреми се да се съобрази с лунните фази и да направи своите заявки за наблюдателно време в периодите, когато няма да му пречи ярката лунна светлина.

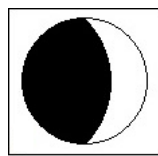
На 21 януари 2019 г. от България е могло да се види началото на пълно лунно затъмнение и Александър организира наблюдение за своите ученици, които подготвя за астрономическата олимпиада. След това им възлага за упражнение да му помогнат в планирането на неговото наблюдателно време в НАО Рожен, като пресметнат какви ще са фазите на Луната на определени дати. Пред вас са рисунките, направени от учениците за определените от тях лунни фази.



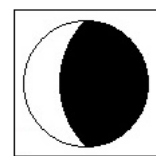
26 февруари



12 май



4 септември



13 ноември

• **А)** Правилно ли са определили учениците фазите на Луната за всяка от тези дати през 2019 г.?

• **Б)** Ако според Вас някои от рисунките не съответстват на истинската фаза на Луната, в която тя е била на съответната дата от 2019 година, то нарисуйте Вие как тя би трябвало да е изглеждала тогава.

Обяснете Вашите отговори.

Синодичният лунен месец (периодът на смяна на фазите на Луната) е равен на 29.5 денонощия.

Решение:

А) На 21 януари 2019 г. се е наблюдавало лунно затъмнение. Следователно, тогава Луната е била във фаза пълнолуние.

Използвайки информацията, че синодичният лунен месец е 29,5 дни, можем да намерим датите (поне с точност до едно денонощие), на които са били следващите пълнолуния през 2019 г. Получаваме: 19 февруари, 20 март, 19 април, 18 май, 17 юни, 16 юли, 15 август, 14 септември, 13 октомври, 12 ноември.

Понеже на 19 февруари Луната е била в пълнолуние, нейната фаза на 26 февруари (седем дни по-късно) би следвало да бъде много близка до последна четвърт. Изобразената на първата рисунка Луна е именно в такава фаза, т.е. за тази дата учениците са я нарисували правилно.

На втората рисунка, която би трябвало да съответства на 12 май, се вижда пълна Луната. Според нашите пресмятания, пълнолунието през месец май е било на 18-то число от месеца. Това означава, че тази рисунка е неправилна.

Септемврийското пълнолуние е било на 14-тия ден от месеца. Следователно, на 4 септември са оставали 10 дни до пълнолунието. Тогава Луната би трябвало да е била във фаза между новолуние и първа четвърт. Тя би трябвало да е изглеждала като огрян отдясно и не много тънък сърп. Именно това са нарисували и учениците на Александър Куртенков, т.е. и в случая фазата на Луната е правилна.

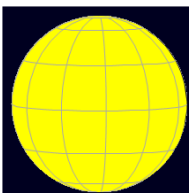
Пресметнахме, че на 12 ноември Луната би трябвало да е била пълна. Следователно на следващата дата (13 ноември) нейната фаза следва да е била най-много един ден след пълнолуние. Това, което учениците са нарисували, е много различно, което означава, че и тази рисунка е неправилна.

При решаването на тази задача е възможно ученикът да е използвал съвсем различен начин, за проверка на това дали нарисуваните лунни фази съответстват на истинските. Ако методът е правилен и са направени верни изводи, следва да се присъдят пълен брой точки.

Б) На 12 май 2019г. (датата на първата неправилно нарисувана картинка), са оставали шест дни до следващото пълнолуние. Следователно, фазата на Луната е била приблизително един ден след първа четвърт. Оттук следва, че за наблюдател в НАО Рожен (в северното полукълбо), Луната е изглеждала така:



Вече получихме, че на 12 ноември фазата на Луната е била пълнолуние. Това означава, че на следващия ден Луната е била почти пълна, като съвсем малка част в дясната страна на нейния диск е била тъмна. Изглеждала е приблизително така:



Критерии за оценяване (общо 12 т.):

А) – За правилен метод, по който се проверява дали фазата на Луната на всяка картинка е такава, каквато е нарисувана и верен извод – 2т за всяка картинка

Б) – За правилно обяснение и вярно изобразена фаза на Луната за всяка от сгрешените дати (12 май и 13 ноември) – 2т.

4 задача. Слънчево петно. Пред вас е снимка на Слънцето от 10 февруари 2024г. Около средата на видимия слънчев диск има голямо продълговато слънчево петно.

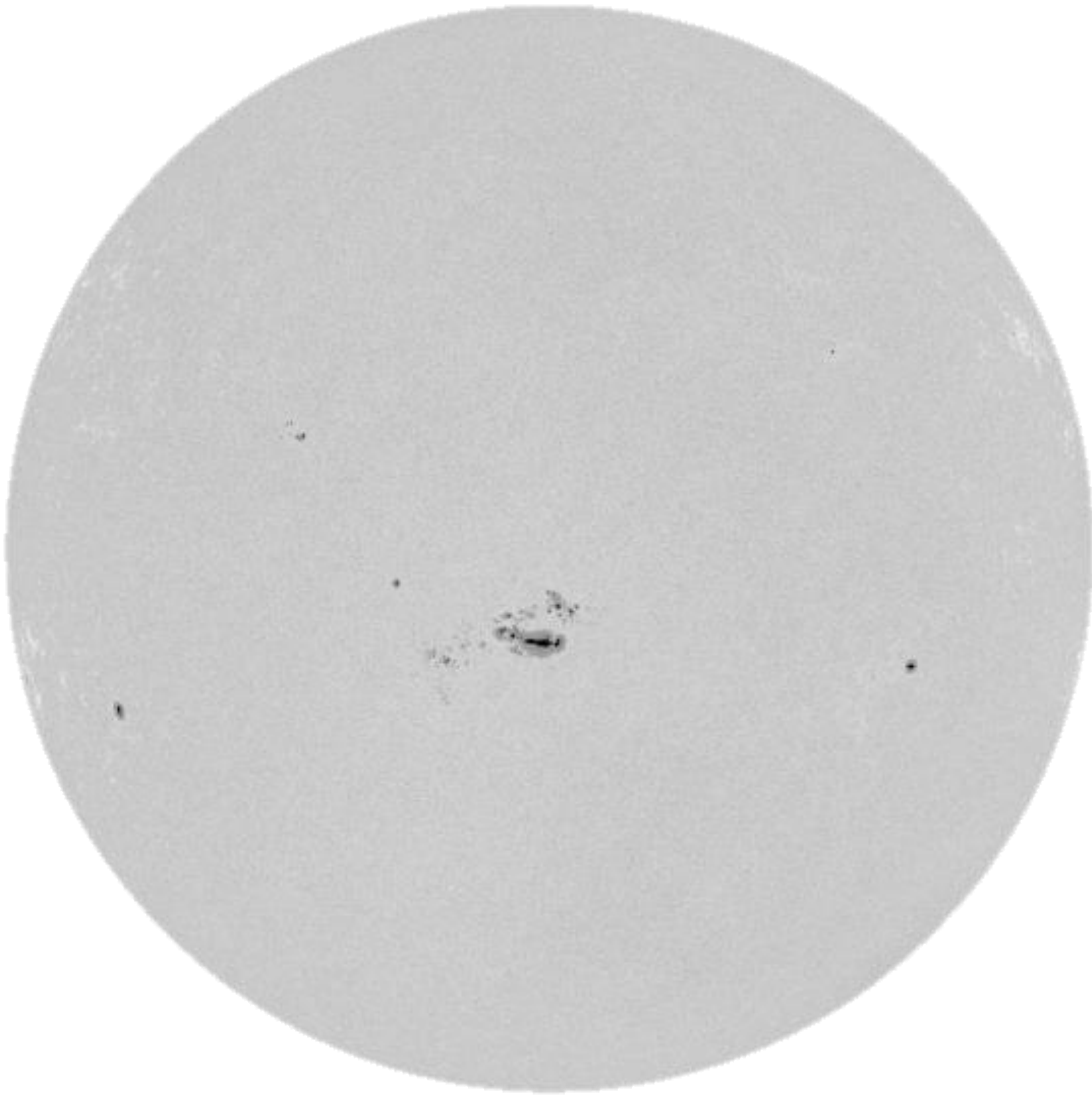
• А) Определете дължината на петното в километри. Диаметърът на Слънцето е 1 392 000 км. На Фиг. 2 е показана отсечката, която приемаме, че съответства на дължината на петното. Използвайте Фиг. 2 само за справка, а всички измервания по това подусловие направете върху Фиг. 1.

• **Б)** Колко пъти петното е по-голямо от диаметъра на Земята? Пресметнете мащаба на Фиг. 2. Начертайте земното кълбо до изображението на слънчевото петно на тази фигура.

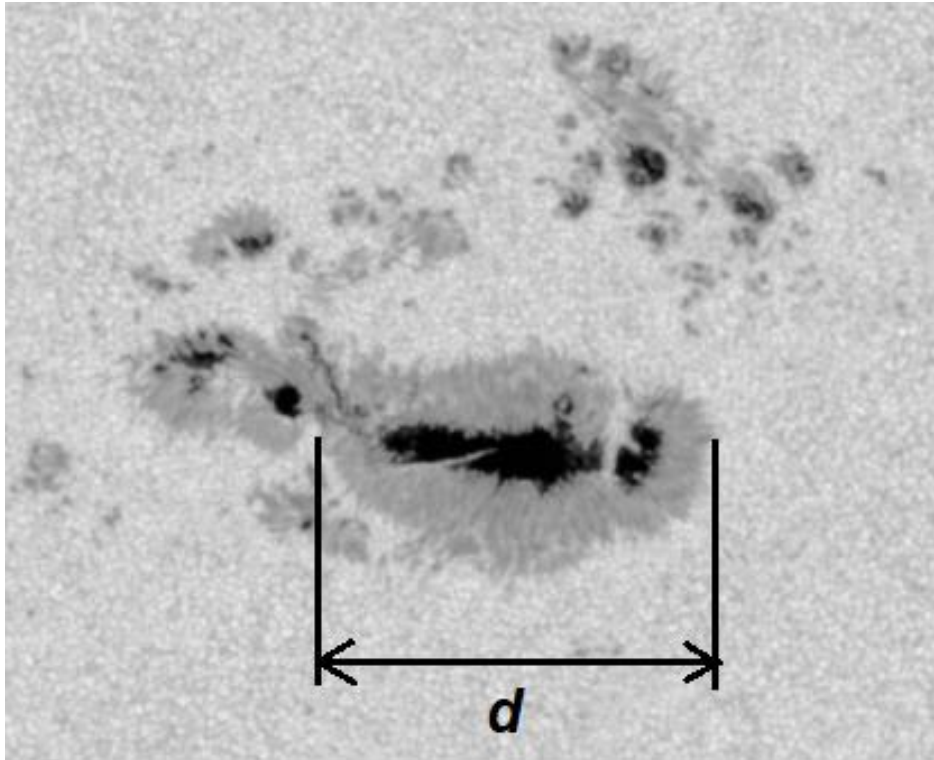
• **В)** Намерете приблизително разстоянието по слънчевата повърхност от петното до най-близката точка, която в момента виждаме на ръба на слънчевия диск?

Справочни данни:

Диаметър на Земята – 12 756 km.



Фиг. 1. Слънцето на 10 февруари 2024 г.



Фиг. 2. Увеличено изображение на петното.

Решение:

Измерваме диаметъра на Слънцето и дължината на петното на Фиг. 1 и получаваме съответно $D_1 = 143 \text{ mm}$ и $d_1 = 6.5 \text{ mm}$. Дадено ни е, че диаметърът на Слънцето е $D = 1392000 \text{ km}$. Оттук можем да намерим мащаба на изображението на Фиг. 1:

$$\frac{D}{D_1} = \frac{1392000 \text{ km}}{143 \text{ mm}} \approx 9734 \text{ km/mm}$$

С помощта на този мащаб получаваме дължината на слънчевото петно:

$$d = \frac{D}{D_1} \cdot d_1 = 9734 \times 6.5 \text{ mm} \approx 63300 \text{ km}$$

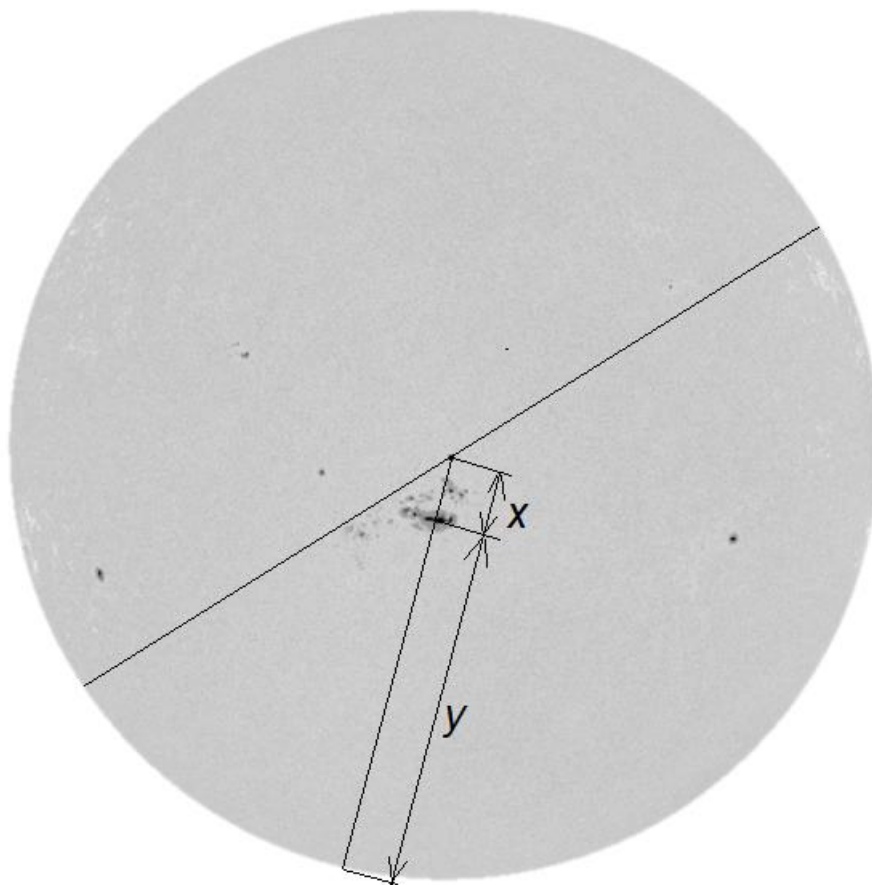
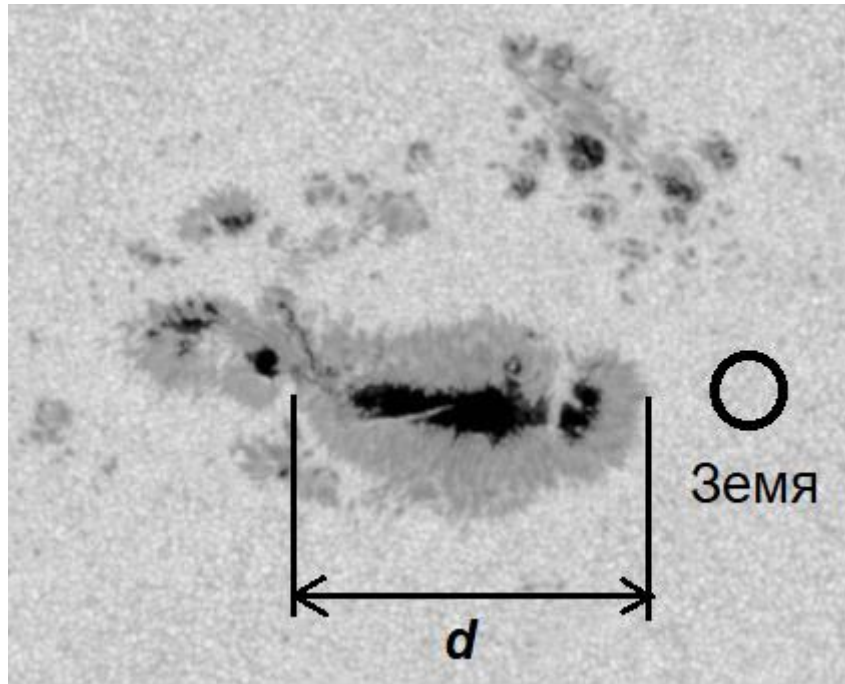
Диаметърът на Земята е $D_0 = 12756 \text{ km}$. Сравняваме го с дължината на слънчевото петно:

$$\frac{d}{D_0} = \frac{63300}{12756} \approx 5$$

Дължината на това слънчево петно е приблизително пет пъти по-голяма от диаметъра на Земята.

Измерваме дължината на петното на Фиг. 2 и получаваме $d_2 = 52.5 \text{ mm}$. Щом като земното кълбо е 5 пъти по-малко от това петно, то на Фиг. 2 трябва да изобразим Земята като кръгче с диаметър $52.5 / 5 = 10.5 \text{ mm}$.

Начертаваме един диаметър на Слънцето на Фиг. 1, измерваме къде е средата на този диаметър и така определяме приблизително местоположението на центъра на видимия слънчев диск. Отбелязваме го с точка. Измерваме разстоянието от тази точка ориентировъчно до средата на слънчевото петно и получаваме $x = 13 \text{ mm}$. Тъй като отсечката x в централната част на видимия слънчев диск и е малка в сравнение с диаметъра на Слънцето, то можем да считаме, че тя е приблизително равна на дъгата от слънчевата повърхност, свързваща центъра на видимия слънчев диск и средата на петното.



Като използваме отново мащаба на Фиг. 1, намираме на какво разстояние в километри отговаря тази отсечка:

$$X = x \times 9734 = 126542 \text{ km}$$

Цялата обиколка на Слънцето е :

$$L = \pi D \approx 4373000 \text{ km}$$

Разстоянието по слънчевата повърхност от центъра на видимия слънчев диск до периферна точка на изображението на Слънцето ще се равнява на $\frac{1}{4}$ от обиколката на Слънцето. Следователно разстоянието по слънчевата повърхност от петното до най-близката точка, която в момента виждаме на ръба на слънчевия диск, ще бъде:

$$y = \frac{L}{4} - X \approx 966708 \text{ km}$$

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За измервания и пресмятания по Фиг. 1 и определяне на дължината на петното в километри – 3 т.

За правилен числен резултат – 1 т.

За определяне колко пъти дължината на петното е по-голяма от диаметъра на Земята – 1 т.

За измервания и пресмятания по Фиг. 2 – 2 т.

За начертаване на земното кълбо в съответния мащаб на Фиг. 2 – 1 т.

За правилна теоретична постановка на начина за определяне на разстоянието от петното до периферна точка от слънчевия диск – 1.5 т.

За измервания и пресмятания – 1.5 т.

За правилен числен резултат – 1 т.

Пояснение: Поради различното качество и мащаби на отпечатване на фигурите в размножените условия на задачите, участниците в олимпиадата може да са получили леко различаващи се резултати от измерванията и пресмятанията. Затова следва да се оценява правилният метод на работа и верността на изчисленията по измерените от учениците величини.

5 задача. Пепеляшка. Благодарение на добрата вълшебница Пепеляшка получава прекрасна рокля и каляска и отива на бала в царския дворец. Вълшебницата я предупреждава, че магията ще трае само до местната полунощ – не по поясно време, а до средата на нощта за географското място, където тя се намира в даден момент. Дворецът е разположен на централния меридиан на своя часови пояс, на географска ширина 60°N . Домът на Пепеляшка е на 50 километра западно от двореца. Увлечена в танците с красивия принц, Пепеляшка си спомня за предупреждението, когато часовникът в балната зала показва 23:55 ч. (поясно време). За 30 секунди тя изтичва навън до каляската, като изгубва едната си кристална пантофка.

• А) С каква скорост трябва да се движи точно на запад вълшебната каляска, така че да закара Пепеляшка до нейния дом, преди да се превърне отново в тиква?

• Б) След като принцесата пристига в дома си в полунощ, тя поглежда ясното нощно небе. Може ли да види следните съзвездия, ако датата е 25 декември (отбележете ДА/НЕ за всяко): Орион, Кентавър, Голяма мечка, Колар, Орел.

Справочни данни:

Радиусът на Земята е 6371 км.

Паралелът на географска ширина 60° е с два пъти по-малка дължина от дължината на земния екватор.

Решение:

След като е видяла часовника в двореца да показва 23:55 ч., Пепеляшка е изтичала до каляската за 30 секунди, което означава, че е тръгнала за дома си в 23:55:30 ч. До

полунощ по този часовник остава интервал от време $\Delta t_1 = 4 \text{ min}30\text{sec}$. Дворецът се намира на 60-градусовия паралел, който е с двойно по-малка дължина от земния екватор. Ако означим земния радиус с R , то дължината на този паралел е:

$$l = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$$

Домът на пепеляшка се намира на разстояние $a = 50 \text{ km}$ от двореца в посока запад, което означава, че той е на същия паралел, на който е дворецът. Разликата между географските дължини на двореца и на дома на Пепеляшка ще бъде:

$$\Delta\lambda = \frac{a}{l} \cdot 360^\circ = \frac{a}{\pi R} \cdot 360^\circ$$

$$\Delta\lambda \approx 0.899^\circ$$

Можем да приемем, че дворцовият часовник е настроен по пояското време на часовия пояс, в който е разположен дворецът. В условието е казано, че дворецът се намира на централния меридиан на часовия пояс и това означава, че местното слънчево време за двореца съвпада с пояското време. Домът на Пепеляшка е на запад от двореца и следователно там полунощ ще настъпи по-късно. Можем да намерим колко време по-късно ще стане това:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta\lambda}{360^\circ} \cdot 24\text{h} \cdot 60 \text{ min} \approx 3.596 \text{ min}$$

Оттук следва, че времето, с което Пепеляшка разполага, за да се върне с каляската в къщи, преди тя да се превърне отново в тиква, е:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 8.096 \text{ min}$$

Сега вече можем да намерим минималната скорост, с която трябва да се движи каляката:

$$v = \frac{a}{\Delta t} \approx 370.6 \text{ km/h}$$

След като пристигне до дома си по средата на нощта и датата е 25 декември, Пепеляшка би могла да види Голямата мечка, понеже тя е незалязващо съзвездие за 60° северна ширина, а също Орион и Колар, тъй като тези съзвездия се виждат през зимните нощи и са изгряващи и залязващи за съответната географска ширина. Не би могла да види съзвездието Орел, защото то се вижда на лятното и есенното небе, а към полунощ през декември вече ще е залязло. Съзвездието Кентавър (Центавър) не е възможно да се вижда, защото на тази географска ширина то е неизгряващо съзвездие от южното небе.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За пресмятане на времето, което остава от слизането на Пепеляшка при каляката до полунощ по дворцовия часовник – 1 т.

За правилен метод за пресмятане на интервала от време, с който разполага Пепеляшка, за да стигне до дома си преди там да е настъпила полунощ – 4 т.

За правилен числен отговор – 1 т.

За намиране на скоростта на каляката – 1 т.

За верни отговори дали ще се виждат петте дадени съзвездия и обяснение $5 \times 1\text{т.} = 5 \text{ т.}$