

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XXI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг на олимпиадата по астрономия

Теоретичен тур – 5 май 2018 г.

Възрастова група IX-X клас – решения

1 задача. Планетоцентрична система. Великолепната планета се движи в орбита около Благодатното слънце. Нейните жители са добри астрономи, но са толкова патриотично настроени към родната си планета, че все още не могат да се откажат от идеята за нейното централно място във Вселената. Те считат, че Благодатното слънце и всички останали планети в тяхната система се движат около Великолепната планета. На Фиг. 1 е представена диаграма, получена от техните наблюдателни данни. Показана е траекторията на необитаемата Искряща планета относно Великолепната планета.

- А) Определете действителния орбитален период на Искрящата планета около Благодатното слънце в единици, равни на годината на Великолепната планета. Намерете радиуса на орбитата на Искрящата планета в единици, равни на радиуса на орбитата на Великолепната планета.

- Б) Начертайте относителната орбита на Благодатното Слънце около Великолепната планета.

Примете, че орбитите на планетите около Благодатното Слънце са кръгови.

Решение:

От Фиг. 1 виждаме, че в рамките на една година за Великолепната планета е имало три максимални сближения с Искрящата планета. Това не би могло да се случи, ако Искрящата планета е външна за Великолепната планета. Следователно става въпрос за вътрешна планета и всеки от моментите на максимално сближаване с Великолепната планета съответства на долно съединение на Искрящата планета, а всеки от моментите на максимално отдалечаване съответства на горно съединение.

Очевидно синодичният период T_S на Искрящата планета е три пъти по-малък от орбиталния период T_0 на Великолепната планета. За сидеричния период T на Искрящата планета можем да напишем:

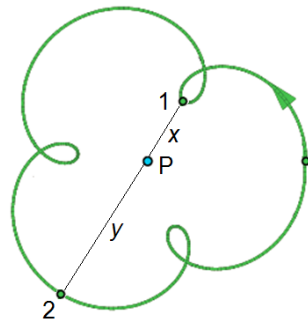
$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}$$
$$T = \frac{T_S T_0}{T_S + T_0} = \frac{\frac{1}{3} T_0^2}{\frac{4}{3} T_0} = \frac{T_0}{4}$$

Орбиталният период на Искрящата година се равнява на една четвърт от годината за Великолепната планета.

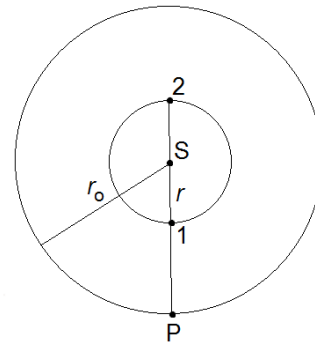
На схемата по-долу във вариант А е показана планетоцентричната представа за движението на Искрящата планета. С точка Р е означена Великолепната планета. Във вариант В е дадена хелиоцентричната представа, като с точка S е означено Благодатното слънце. Разстоянията от Великолепната планета до Искрящата планета в точките 1 и 2 във вариант А съответстват на разстоянията между двете планети в точките 1 и 2 във вариант В. Нека x и y са разстоянията между двете планети съответно при максимално сближаване и максимално отдалечаване между тях, а r_0 и r са радиусите на техните орбити около Благодатното Слънце. Тогава са в сила съотношенията:

$$x = r_0 - r$$

$$y = r_0 + r$$



A



B

Измерваме на Фиг. 1 разстоянията x и y в милиметри и пресмятаме:

$$r_0 = \frac{x + y}{2}$$

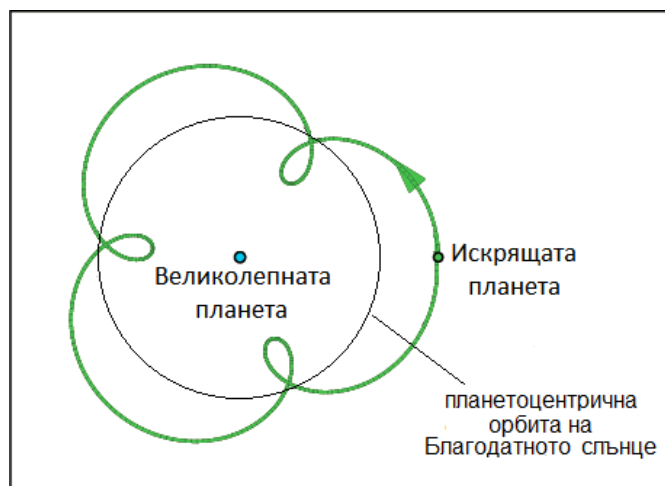
$$r = \frac{y - x}{2}$$

$$\frac{r}{r_0} = \frac{y - x}{x + y} \approx 0.38$$

Така определяме, че радиусът на орбитата на Искрящата планета е равен на 0.38 единици, аналогични на астрономическата единица в Слънчевата система, т.е., единици, равни на радиуса на орбитата на Великолепната планета. Същото можем да пресметнем и ако използваме третия закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2}$$

Накрая в съответния мащаб начертаваме планетоцентричната орбита на Благодатното слънце. То се намира на разстояние r_0 от Благодатната планета. Траекторията му представлява окръжност, защото това разстояние не се променя. То е средно аритметично от разстоянията x и y до Искрящата планета, която при движението си винаги остава близо до Благодатното Слънце (и това е обяснимо, защото в действителност Искрящата планета обикаля около Слънцето).



Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За обяснения, водещи до извода, че Искрящата планета е вътрешна – 2 т.

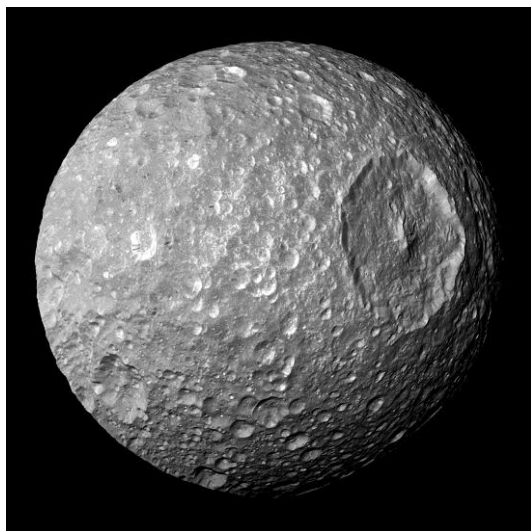
За определяне на синодичния период на Искрящата планета – 2 т.

За пресмятане на сидеричния период на Искрящата планета – 4 т.

За определяне на радиуса на орбитата на Искрящата планета – 4 т.

За начертаване на планетоцентричната орбита на слънцето – 3 т.

2 задача. Фантастичен телескоп. Начинаещ астроном с буйно въображение има съвсем нестандартна и може би доста необмислена идея за космически телескоп. Според него телескопът трябва да има за обектив огромно огледало, монтирано в кратера Хершел на спътника на Сатурн Мимас.



Спътникът Мимас с кратера Хершел

Спътникът Мимас има радиус 198 км и маса 3.75×10^{19} кг. Неговият орбитален период около Сатурн е 0.942 денонощия и спътникът е приливно заключен. Това означава, че периодът му на околоосно въртене е равен на орбиталния му период и той е винаги обвърнат към Сатурн с една и съща своя страна. Центърът на кратера Хершел лежи почти точно на екватора на спътника. Диаметърът на кратера е 139 км.

Фотоприемната апаратура на хипотетичния телескоп трябва да се намира в главния фокус на огледалото. Тя ще се носи от стационарен спътник, който се движи в екваториалната равнина на Мимас с орбитален период равен на периода на неговото околоосно въртене, така че непрекъснато ще „виси” над кратера.

- А) Намерете фокусното разстояние на обектива на телескопа.
- Б) Какъв ще бъде диаметърът на изображението на Земята, наблюдавана с този телескоп, върху цифровата матрица, разположена в главния фокус? Радиусът на Земята е 6371 км, радиусът на орбитата на Сатурн около Слънцето е 9.58 астрономически единици, а една астрономическа единица е 149.6×10^6 км.
- В) Каква ще бъде разделителната способност на телескопа при наблюдение във видима светлина (5500 Å)?

- Г) Кратерът Хершел се намира на около 110° от центъра на обърнатата към Сатурн страна на спътника Мимас, така че планетата Сатурн няма да влиза в ползурението на телескопа и да пречи на наблюденията. Но какви ще бъдат проблемите при работата с такъв телескоп?

Гравитационната константа е равна на $6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{с}^2$.

Решение:

Нека M е масата на Мимас, R е неговият радиус, T е периодът му на околоосно въртене, а r_s е радиусът стационарната орбита около него. Съгласно III закон на Кеплер:

$$\frac{r_s^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

където γ е гравитационната константа.

$$r_s = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}}$$

$$r_s \approx 749 \text{ km}$$

Фокусното разстояние на телескопа ще бъде равно на височината на стационарния спътник над повърхността на Мимас:

$$F = r_s - R$$

$$F = 551 \text{ km}$$

Означаваме с R_0 радиуса на Земята и с r разстоянието от Сатурн до Слънцето. Ще считаме, че Земята е в такава позиция по орбитата си, че разстоянието от Сатурн до нея е равно на r . Тогава видимият ъглов размер на Земята ще бъде:

$$\delta = \frac{2R_0}{r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 60' \cdot 60'' \approx 1.84''$$

Размерът на изображението на Земята върху цифровата матрица на страничния телескоп ще бъде:

$$d = \delta F = \frac{2R_0}{r} \cdot F$$

$$d \approx 4.9 \text{ метра}$$

При липса на атмосфера и всякакви несъвършенства на оптичната система на телескопа, неговата разделителна способност се ограничава от дифракцията. Това ограничение се характеризира с размера на т.нар. диск на Ейри:

$$\alpha = \frac{1.22\lambda}{D}$$

където D е диаметърът на обектива на телескопа, в нашия случай – диаметъра на кратера Хершел. Чрез горната формула α се получава в радиани, но е по-удобно да го превърнем в дъгови секунди. Така намираме:

$$\alpha \approx 10^{-6} \text{ дъгови секунди}$$

Качествата на този нестандартен телескоп звучат фантастично, но дали въобще той ще може да бъде реализиран е доста спорен въпрос. Сигурно ще е извънредно трудно да се направи огледален обектив с такъв гигантски диаметър. Телескопите са сложни технически съоръжения, при изработката на които се изисква изключителна прецизност. Не е ясно как ще се спазва абсолютно еднакво фокусно разстояние на

хипотетичния телескоп, като се има предвид, че Мимас се намира близо до Сатурн и поради приливното въздействие на тази планета гигант и лекия ексцентрицитет на орбитата на Мимас, височината на спътника с цифровата матрица над повърхността на Мимас ще се променя. Освен това трябва цифровата матрица да има грамадни размери, иначе зрителното поле на телескопа ще е твърде малко. Също така, поради околоосното въртене на Мимас, времето на експонация на фотографираните космически обекти ще е много кратко. Значителен недостатък ще бъде и крайно ограничената област от небесната сфера, в която ще може да се наблюдава с този телескоп.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилен начин за определяне на фокусното разстояние на телескопа – 4 т.

За верен числен резултат – 1 т.

За правелен начин за пресмятане на размера на изображението на Земята върху цифровата матрица – 4 т.

За верен числен резултат – 1 т.

За определяне на разделителната способност – 2 т.

За разсъждения относно проблемите пред реализирането на телескопа и работата с него – 3 т.

3 задача. Покритие на звезда. Професор по лунна геология се намира в центъра на видимата от Земята страна на Луната и с наслаждение и лека носталгия съзерцава пълния сияещ диск на родната Земя в зенита.

- А) Кое време от лунното денонощие ще бъде за геолога – ден или нощ и коя част от деня или нощта – началото, средата или края?

- Б) Ако направим аналогия с лунните фази, след колко време Земята ще бъде във фаза последна четвърт?

- В) На Фиг. 2 е показано видимото положение на Земята в лунното небе, а на Фиг. 3 е дадена увеличена част от изобразеното на Фиг. 2. Начертайте възможно по-точно със стрелка на Фиг. 3 посоката, в която професорът ще наблюдава видимото денонощно движение на звездите на лунното небе. Обосновете вашия отговор.

- Г) Пресметнете продължителността на централно покритие на звезда от Земята, което може да се наблюдава от лунния геолог.

Радиусът на Земята е 6371 км, радиусът на Луната е 1738 км. Считайте, че лунната орбита е кръгова с радиус 384 400 км. Сидеричният лунен месец е 27.32 денонощия, а синодичният 29.53 денонощия.

Решение:

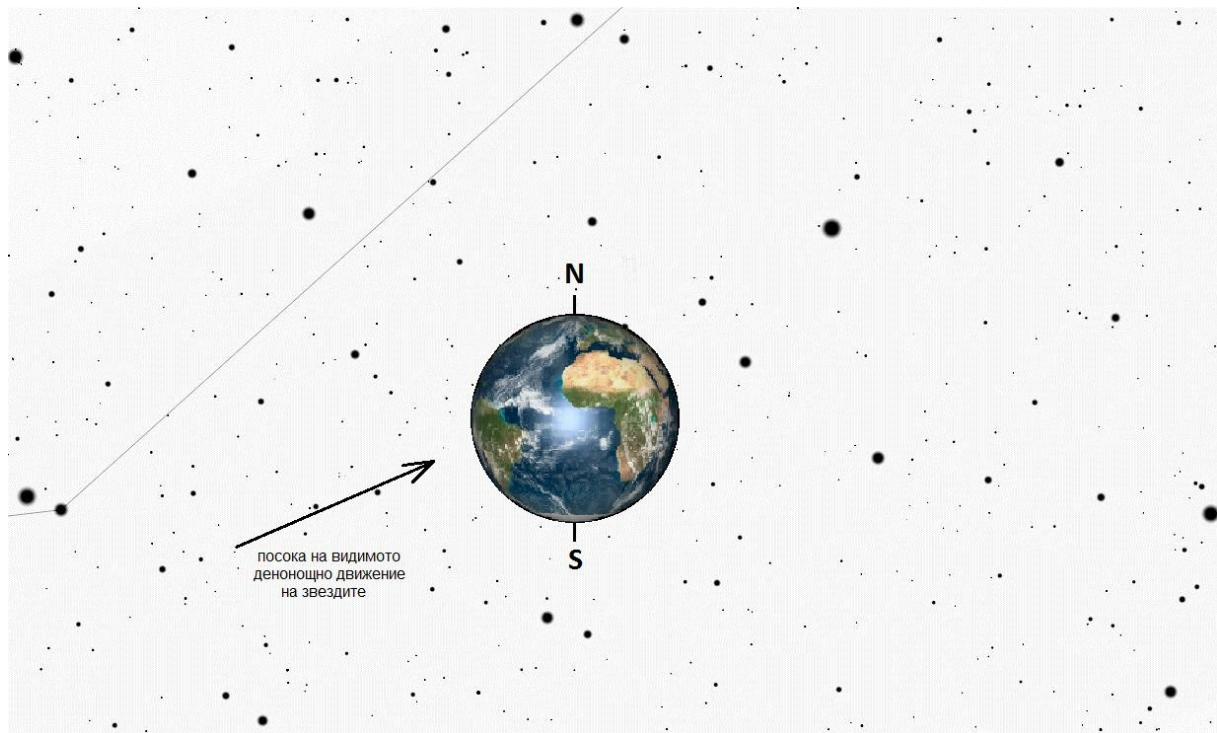
Щом професорът геолог вижда Земята като пълен светец диск, то фазата на Луната за земните жители е новолуние. Обърнатата към Земята страна на Луната е изцяло неосветена от Слънцето. Космическият геолог се намира в центъра на тази неосветена страна и за него трябва да е полунощ, т.е. средата на лунната нощ.

Периодът на смяна на фазите на Земята от гледна точка на лунен наблюдател се равнява на периода на смяна на фазите на Луната за нас, или на синодичния лунен месец. Земята ще бъде във фаза последна четвърт след време:

$$29.53 \text{ денонощия} / 4 \approx 7.38 \text{ денонощия.}$$

На Фиг. 2 се вижда, че лунният геолог наблюдава Земята около есенната равноденствена точка. Това означава, че Слънцето в този момент се намира близо до пролетната равноденствена точка, или моментът на наблюдението е около пролетното равнодествие. Тогава проекцията на земната ос на фона на звездите сключва с

еклиптика ъгъл $\varepsilon \approx 23.5^\circ$. Лунната ос има незначителен наклон спрямо вертикалата към еклиптиката. Ако го пренебрегнем, то видимото денонощно движение на звездите в лунното небе трябва да става успоредно на еклиптиката, от изток на запад. Стрелката трябва да сключва ъгъл $90^\circ - \varepsilon \approx 66.5^\circ$ с отбелязаната върху Фиг. 3 земна ос.



Ако не отчитаме либрациите на Луната, Земята трябва да е неподвижна в небето на лунния наблюдател. Продължителността на покритието на звезда от Земята ще се определя от видимия ъглов диаметър на нашата планета и денонощното въртене на звездното небе, което става с период, равен на сидеричния лунен месец.

Ъгловият диаметър на Земята в небето на професора по геология ще бъде:

$$\delta_T = \frac{2R_T}{r - R_L} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

където R_T и R_L са радиусите на Земята и Луната, а r е разстоянието между техните центрове. В знаменателя от разстоянието r изваждаме лунния радиус, за да отчетем факта, че професорът се намира в средата на обърната към Земята страна на Луната.

$$\delta_T \approx 1.91^\circ$$

За продължителността на централно покритие на звезда от Земята намираме:

$$\Delta t = \frac{\delta_T}{360^\circ} \cdot 27.32 \text{ d} \times 24 \text{ h} \approx 3.48 \text{ h} \approx 3 \text{ h } 29 \text{ min}$$

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За отговор кое време на лунното денонощие е и обяснение – 2 т.

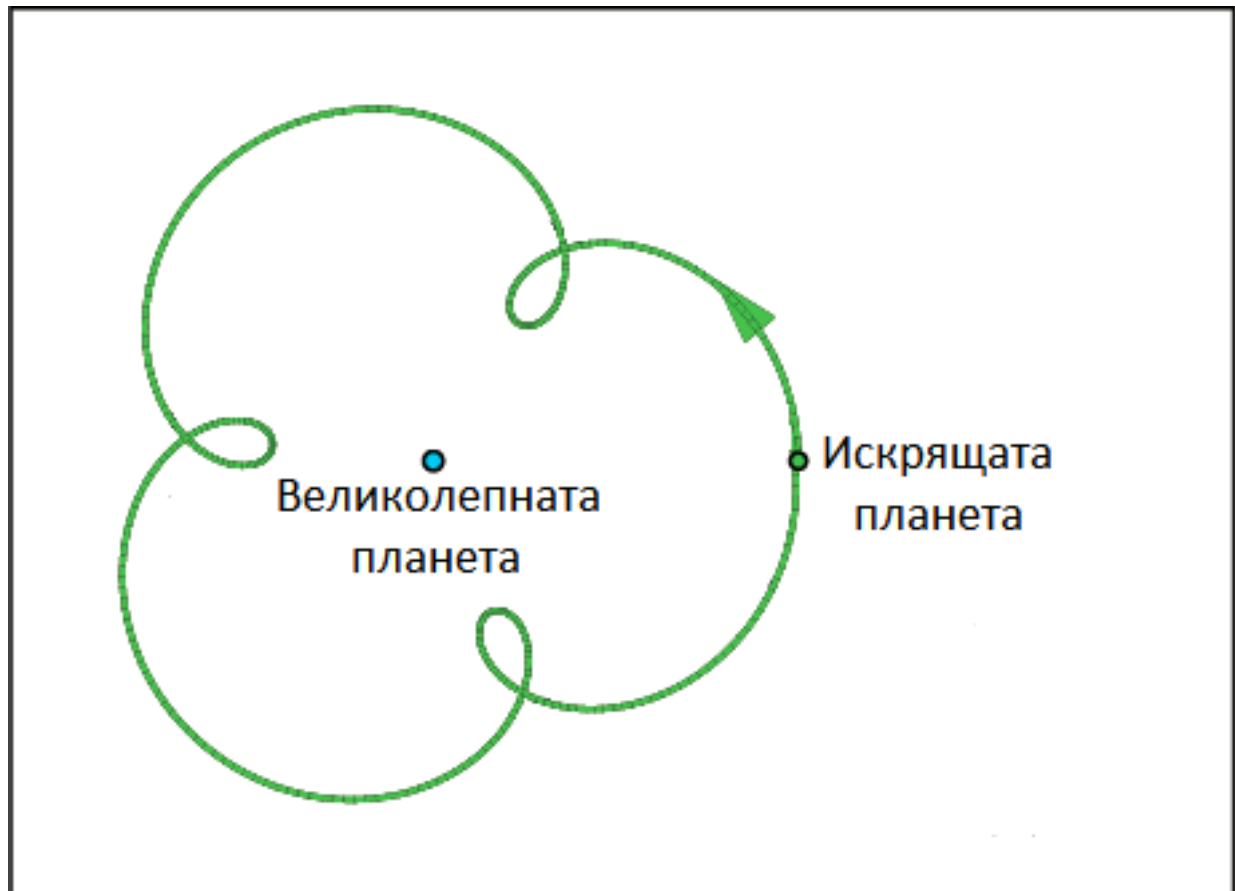
За пресмятане на времето до фаза последна четвърт на Земята – 2 т.

За правилни разсъждения относно определяне на посоката на видимото движение на звездите – 3 т.

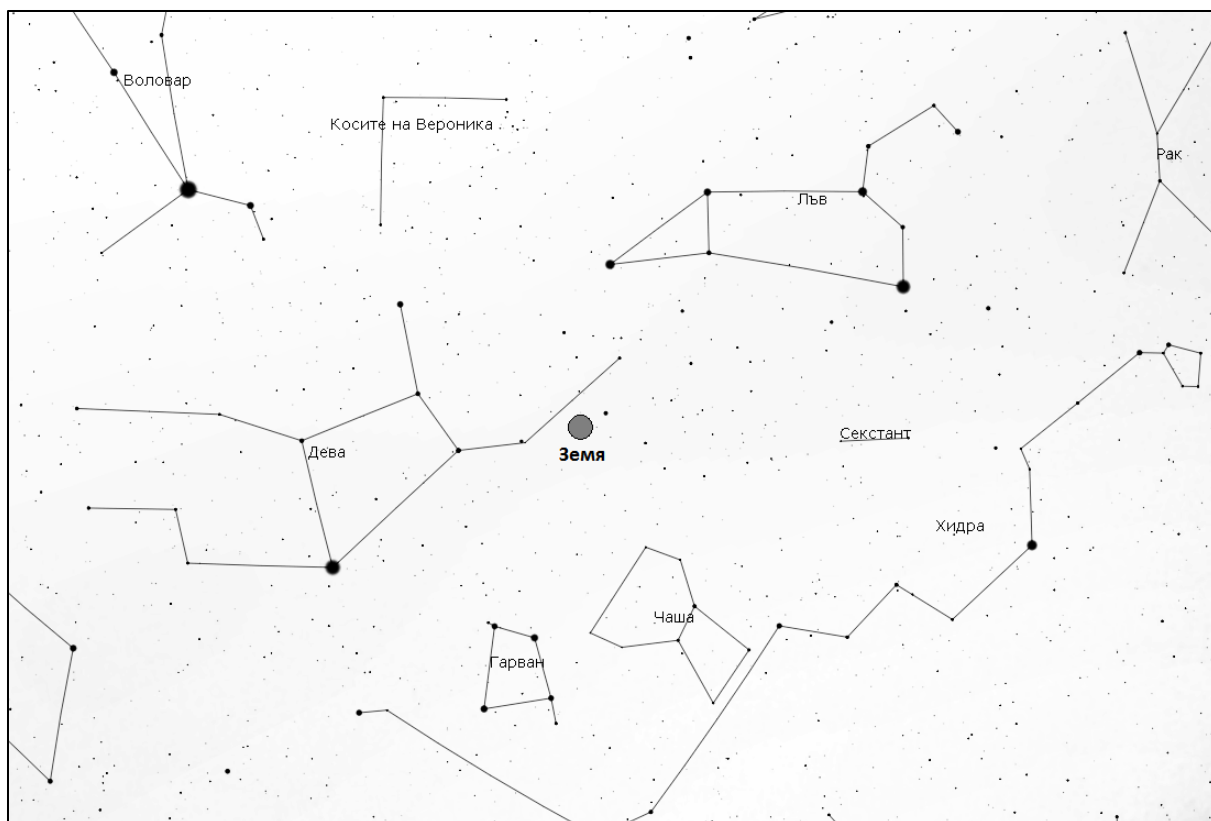
За правилно начертаване на стрелката – 2 т.

За правилен метод на пресмятане на продължителността на покритие на звезда – 4 т.

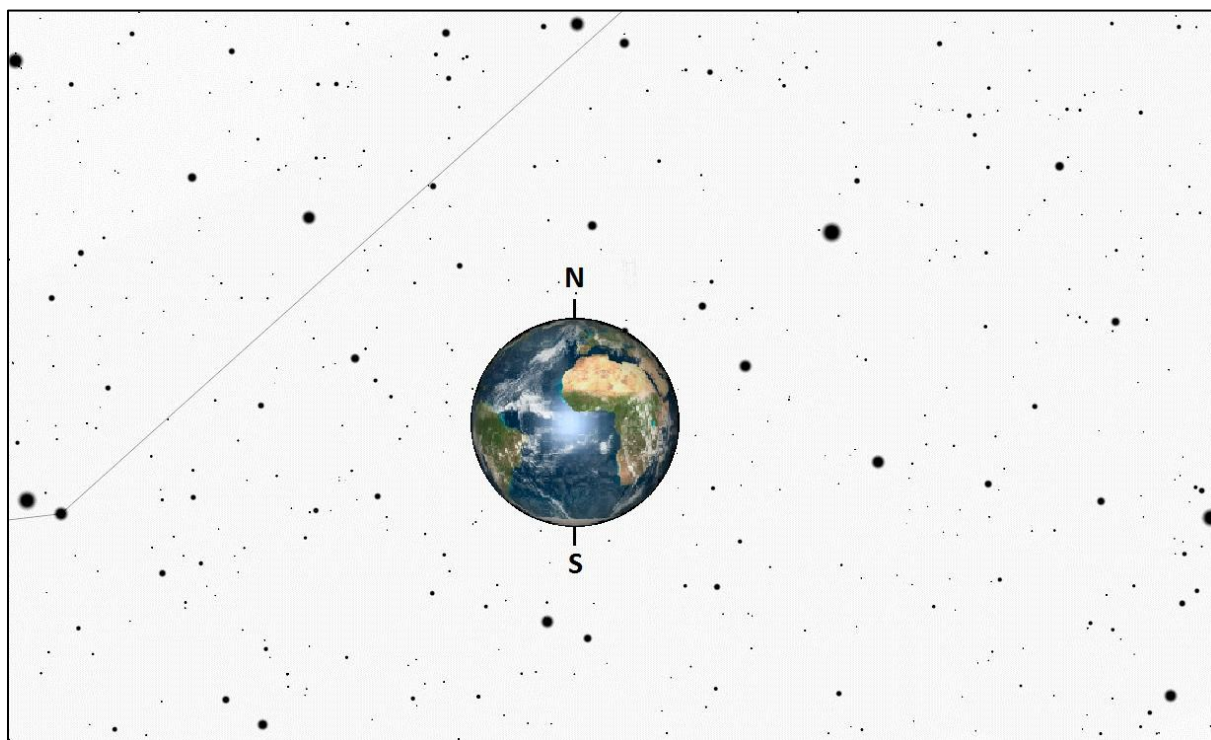
*За отчитане на факта, че професорът е по-близо до Земята с един лунен радиус в сравнение с разстоянието между центровете на Земята и Луната – 1 т.
За правилен числен резултат – 1 т.*



Фиг. 1. Относителна траектория на Искрящата планета в система, в която Великолепната планета е неподвижна – към задача 1.



Фиг. 2. Видимо положение на Земята на лунното небе – към 3 задача.



Фиг. 3. Увеличена част от Фиг. 2 – към 3 задача.