

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

II кръг, 24 февруари 2018 г.
Ученици от 9-10 клас – решения

1 задача. Слънчев часовник. На Фиг. 1 е показана снимка на слънчев часовник, намиращ се в град Сан Франциско, САЩ. Малката наклонена пирамида се нарича гномон и хвърляната от нея сянка показва колко е часът. В течение на деня крайната точка от сянката на гномона описва линия по циферблата на часовника. Тази линия е различна в различни периоди на годината. На циферблата са отбелязани седем тъмни линии. Всяка от тях съответства приблизително на хода на часовника (на върха на сянката) през определени месеци от годината.

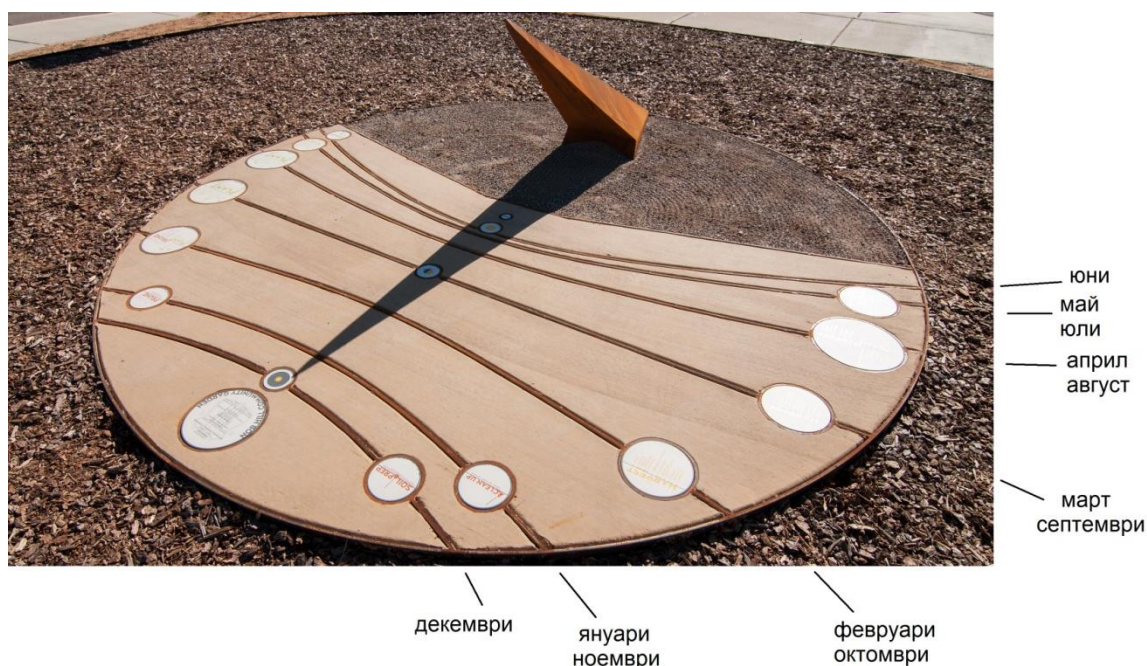
- А) Означете на снимката на кои месеци от годината съответства всяка от седемте тъмни линии.

- Б) Колко е часът и кой месец от годината е в момента, когато е направена снимката?

Обяснете вашите отговори.

Решение:

При своето видимо денонощно движение по небето Слънцето описва различни пътища през различните годишни сезони. В деня на лятното слънцестояние на 20-21 юни Слънцето изгрява много рано, издига се високо над хоризонта по пладне и залязва късно. В деня на зимното слънцестояние на 21-22 декември Слънцето изгрява много късно, издига се на най-малка височина над хоризонта по пладне и залязва рано. Това означава, че при лятно слънцестояние около средата на деня сянката на гномона на слънчевия часовник ще бъде най-къса, а при зимно слънцестояние – най-дълга. Като използваме тези съображения, означаваме месеците, през които ходът на слънчевия часовник е близък до означените линии.



В момента, когато е направена снимката, краят на сянката на гномона е по средата на линията, съответстваща на месец декември. Следователно снимката е направена в 12 часа през декември.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилни разсъждения относно дължината на сянката на гномона в различни периоди от годината – 3 т.

За правилно означение на месеците по линиите – 9 т.

За определяне на месеца и времето, когато е направена снимката – 3 т.

2 задача. Автомобил в небето. На 6 февруари 2018 г. от космодрума Саре Canaveral в САЩ е изстреляна ракета, която извежда в орбита около Слънцето червения автомобил на видния изобретател и бизнесмен Elon Musk. Целта е автомобилът да достигне до Марс. Поради техническа неточност при началната маневра с ракетните двигатели автомобилът тръгва по орбита с разстояние до Слънцето в перихелий 0.98 AU (астрономически единици) и в афелий 2.61 AU.

- А) Намерете орбиталния период на автомобила около Слънцето.
- Б) Разгледайте схемата на Фиг. 2. Направете необходимите пресмятания и означете положението на Земята по нейната орбита в момента, когато автомобилът на Elon Musk достигне афелия на своята орбита около Слънцето.
- В) Ако имаме достатъчно мощен телескоп, в кое съзвездие ще виждаме автомобила от Земята тогава?

Решение:

Голямата полуос на орбитата на космическия автомобил е:

$$a = \frac{0.98 + 2.61}{2} = 1.795 \text{ AU}$$

Орбиталния му период намираме от третия закон на Кеплер. Когато голямата полуос е изразена в астрономически единици, а периода в години, то третият закон на Кеплер може да се запише в следния опростен вид:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1$$

Оттук намираме:

$$T = \sqrt{a^3}$$
$$T \approx 2.405 \text{ години}$$

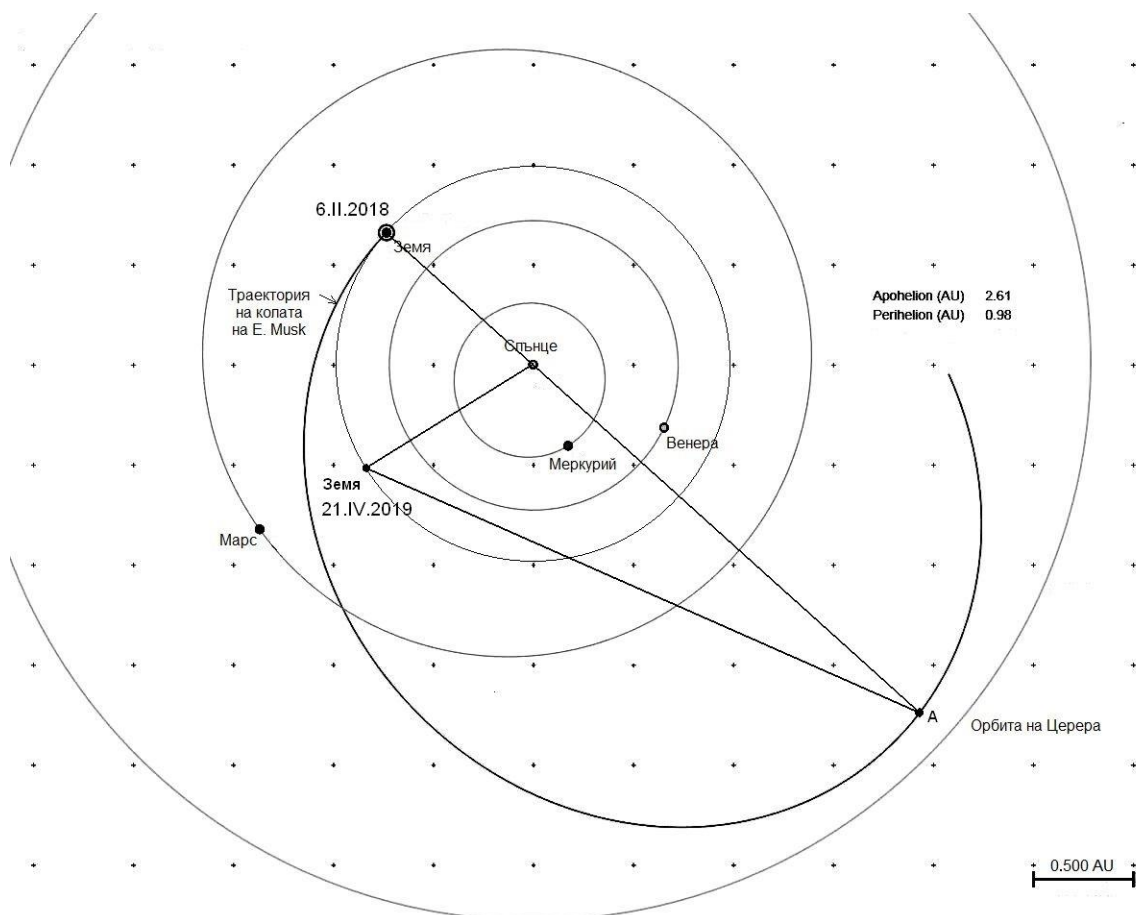
Автомобилът ще достигне до афелия на своята орбита за време:

$$t = T/2 \approx 1.203 \text{ години}$$

За това време Земята ще направи една пълна обиколка по своята орбита и ще измине още 0.203 части от следващата обиколка. Това съответства на ъгъл на завъртане около Слънцето спрямо първоначалното положение:

$$0.203 \times 360^\circ \approx 73^\circ$$

Отмерваме с транспортир този ъгъл от положението на Земята на 6 февруари 2018 г. по посока на нейното обикаляне около Слънцето и получаваме новото положение на Земята в момента, когато космическият автомобил е в своя афелий в точка А на схемата.



Датата, на която ще се случи това, е $0.203 \times 365.25 \approx 74$ дни след 6 февруари. До края на февруари остават 22 дни. Към тях прибавяме 31 дни за март и получаваме 53 дни. До края на периода от 74 дни има $74 - 53 = 21$ дни. Така получаваме, че космическият автомобил ще бъде в своя афелий на 21 април 2019 г. На тази дата Слънцето трябва да се намира близо до границата на съзвездията Риби и Овен. Измерваме ъгъла “Слънце” – “Земя на 21 април” – “афелий на орбитата на автомобила (точка А)”. Той се оказва приблизително 56° . Точката, в която ще виждаме автомобила от Земята е на 56° западно от Слънцето. Това са почти две зодиакални съзвездия, през които Слънцето вече е преминало. Следователно тя е близо до границата на съзвездията Козирог и Водолей, но с по-голяма вероятност във Водолей.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За намиране на голямата полуос на орбитата на автомобила – 2 т.

За намиране на периода – 2 т.

За пресмятане на времето, необходимо за достигане до афелия – 1 т.

За теоретично определяне на новото положение на Земята – 3 т.

За измерване и нанасяне на схемата – 2 т.

За правилен метод за определяне в кое съзвездие ще бъде автомобилът – 2 т.

За измерване и практическо приложение на метода – 2 т.

За правилно посочване на съзвездието, в което ще е автомобилът – 1 т.

3 задача. Наблюдение на планета. От столетия насам астрономите са успявали да определят разстоянията между различни обекти в Слънчевата система, макар и само в относителни единици. Като относителна единица се е използвала астрономическата

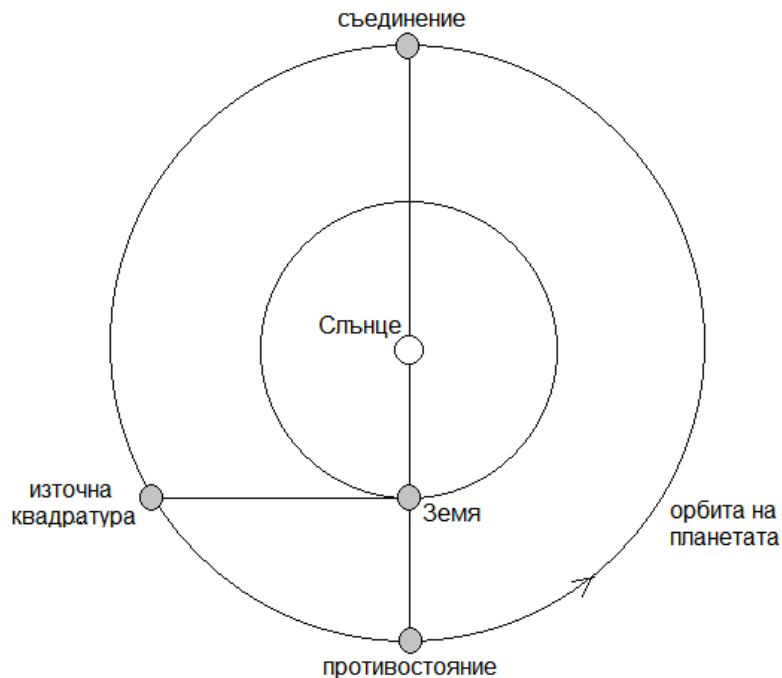
единица (средното разстояние от Земята до Слънцето). Нейната истинска стойност е била определена сравнително точно едва във втората половина на XVII век.

- А) Представете си, че сте астроном от XVII век. На 5 януари наблюдавате една планета в противостояние (опозиция). На 24 юли същата година, която не е високосна, планетата е в съединение. Определете нейния сидеричен период (истинския период на обикаляне на планетата около Слънцето).

- Б) Като използвате вашите данни и известния вече тогава трети закон на Кеплер, определете радиуса на орбитата на планетата в астрономически единици.

- В) Представете си, че вече живееете в XXI век, но не знаете третия закон на Кеплер. Затова пък разполагате с добър телескоп и определяте видимия ъглов диаметър на планетата. Когато планетата е била в противостояние, той е бил $45.9''$, а когато е била в източна квадратура – $37.7''$. Определете радиуса на орбитата на планетата по тези данни, отново в астрономически единици.

- В) Коя е планетата?



Планетни конфигурации

Решение:

Пресмятаме броя дни от 5 януари до 24 юли:

26 (до края на януари) + 28 (февруари) + 31 (март) + 30 (април) + 31 (май) + 30 (юни) + 24 (юли) = 200 дни

Това е времето от противостоянието до съединението на планетата. То представлява половината от нейния синодичен период. Следователно синодичният период на планетата е $T_{SYN} = 400$ дни. Щом планетата може да е в противостояние, то тя е външна планета. Ако $T_0 = 1$ година е орбиталният период на Земята около Слънцето, а T_{SID} е сидеричният период на планетата, то в сила е съотношението:

$$\frac{1}{T_{SYN}} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_{SID}}$$

От него намираме:

$$T_{SID} = \frac{T_0 T_{SYN}}{T_{SYN} - T_0}$$

$$T_{SID} \approx 11.51 \text{ години}$$

Записваме третия закон на Кеплер за случая, когато радиусът на орбитата на планетата r_J се измерва в астрономически единици, а орбиталният период в години:

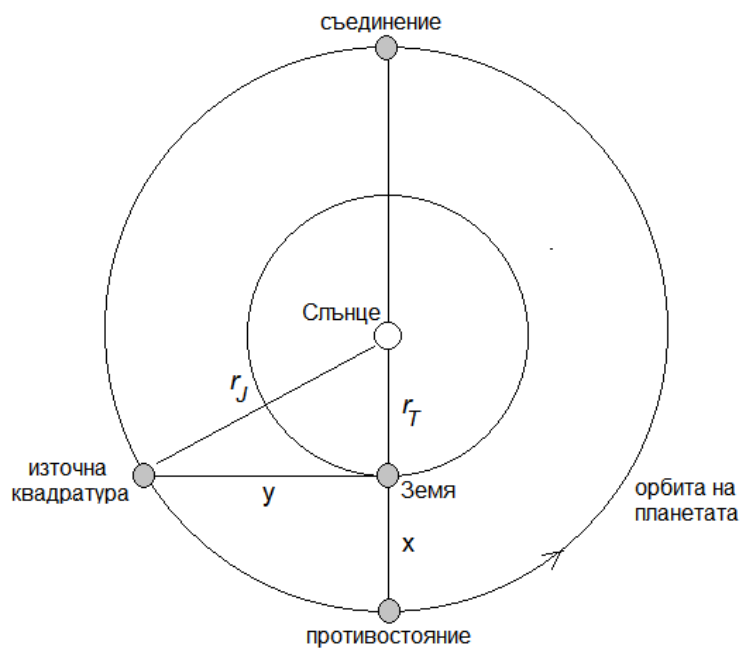
$$\frac{r_J^3}{T_{SID}^2} = 1$$

По-нататък пресмятаме:

$$r_J = \sqrt[3]{T_{SID}^2}$$

$$r_J \approx 5.1 \text{ AU}$$

Да означим видимия ъглов диаметър на планетата в противостояние с δ_1 , а в източна квадратура – с δ_2 . Нека разстоянието между Земята и планетата в противостояние да бъде x , а разстоянието между Земята и планетата в източна квадратура да бъде y . Радиусите на земната орбита и на орбитата на Юпитер са съответно r_T и r_J .



Както се вижда от схемата:

$$x = r_J - r_T$$

$$y = \sqrt{r_J^2 - r_T^2}$$

Очевидно е съотношението:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\sqrt{r_J^2 - r_T^2}}{r_J - r_T}$$

Оттук пресмятаме:

$$\frac{r_J}{r_T} = r_J[\text{AU}] = \frac{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 - 1}$$

$$r_J \approx 5.1 \text{ AU}$$

От получения орбитален период и от радиуса на орбитата заключаваме, че става въпрос за планетата Юпитер.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За съображението, че времето от противостояние до съединение е половината от синодичния период на планетата – 1 т.

За определяне на синодични период на планетата – 2 т.

За използване на правилната формула за синодичен и сидеричен период на външна планета – 1 т.

За пресмятане на сидеричния период – 2 т.

За определяне на орбиталния радиус на планетата от закона на Кеплер – 3 т.

За правилен метод за определяне на орбиталния радиус на планетата чрез видимите ъглови размери в противостояние и квадратура – 4 т.

За верен числен резултат – 1 т.

За верен отговор коя е планетата – 1 т.

4 задача. Слънце на еклиптиката. Разполагате с карта на звездното небе (Фиг. 3) на която е нанесена еклиптиката. Тя е права линия, минаваща хоризонтално през средата на картата. На линията има вертикални маркери през 10 градуса. Дадени са съкратените трибуквени означения на съзвездията с латински букви, а с пунктирни линии са нанесени границите на съзвездията. Със стрелка е показано положението на Слънцето върху еклиптиката на 21 декември.

- А) Посочете къде е било Слънцето на 21 октомври и на 20 февруари.
- Б) През кои съзвездия преминава Слънцето в периода 21 октомври – 20 февруари?
- В) Напишете приблизителните дати на пресичане на границите на съзвездията от Слънцето, при условие, че движението му по еклиптиката през зимното полугодие е равномерно.

Упътване: Обърнете внимание, че Земята преминава през перихелия на орбитата си в първите дни на януари и поради това средното движение на Слънцето по еклиптиката през зимното полугодие е малко по-бързо, в сравнение със средното му движение през лятното полугодие или със средното му движение през годината.

Решение: От 21 октомври до 21 декември изминават 61 денонощия. От 21 декември до 20 февруари също са 61 денонощия. Следователно Слънцето ще се придвижи за това време на малко над 60°. Щом приемаме, че движението на Слънцето през зимното полугодие по еклиптиката е равномерно, то трябва да пресметнем с каква средна скорост то се движи през този период на годината. За целта разделяме 180 градуса, които Слънцето изминава за цялото зимно полугодие, на броя на дните в това

полугодие. От датата на есенното равноденствие 22.09. до датата на пролетното равноденствие 20.03. изминават 181 денонощия. Това е броят на дните в зимното полугодие:

$$n = 180^\circ/181^d = 0.994475 \approx 0.9945^\circ/d$$

Даденото положение на Слънцето е на 21.12. в съзвездията Стрелец. От 21.10. до 21.12. са 61 денонощия. От 21.12. до 20.02. също са 61 денонощия. Умножаваме броя на денонощията по n и получаваме колко градуса е изминало Слънцето през този интервал от време:

$$n_1 = 61^d \cdot n = 60^\circ.67$$

Знаем, че Земята е в своя перихелий в началото на януари. Това е близо до зимното слънцестоене, което е на 21.12. Затова симетрично нанасяме по $60^\circ.67$ на изток и на запад от даденото положение на Слънцето на 21.12. Положенията на Слънцето са на $2/3$ градуса след шестите маркери в двете посоки. (Виж картата.)

На 21.10. Слънцето е в съзвездията Дева. След това то преминава последователно през съзвездията Везни, Скорпион, Змиеносец, Стрелец, Козирог и накрая навлиза във Водолей.

Намираме мащаба на изображението като делим разстоянието между маркерите на разстоянието в градуси между тях. Забелязваме, че между централните маркери разстоянията в милиметри са малко по-малки отколкото между крайните, но разликите са много малки, а в задачата не се търси голяма прецизност, предвид приближението за равномерно движение през зимното полугодие. Разстоянието между крайните маркери е 206 mm. То отговаря на 120° на небесната сфера. Мащабът на изображението е:

$$k = 206\text{mm}/120^\circ = 1.7167\text{mm/deg}$$

Трябва да пресметнем колко милиметра изминава Слънцето за 1 денонощие. За целта умножаваме получените по-горе коефициенти:

$$m = k \cdot n = 1.7073 \text{ mm/d}$$

Измерваме в милиметри разстоянията до пресечните точки на еклиптиката с границите на съзвездията като тръгваме от даденото положение на Слънцето на 21.12. и получените положения за 21.10. и 20.02. и мерим до близките относно тях граници на съзвездията. След това делим на мащаба m . Така определяме за колко денонощия Слънцето достига до пресечните точки на еклиптиката с границите на съответните съзвездия. След измерванията и пресмятанията за датите на пресичане на границите на съзвездията получаваме: Везни – 29.10., Скорпион – 22.11., Змиеносец – 29.11., Стрелец – 17.12., Козирог – 18.01., Водолей – 16.02.

Справка с литературата показва, че само при три съзвездия има разлика от 1 денонощие. Тя се дължи на това, че Слънцето не се движи равномерно в рамките на зимното полугодие, на натрупване на грешка при измерване на по-дълги отсечки и на това, че сме взели кръгли начални и крайни дати като изходни моменти при пресмятанията, което внася допълнителна независима грешка.

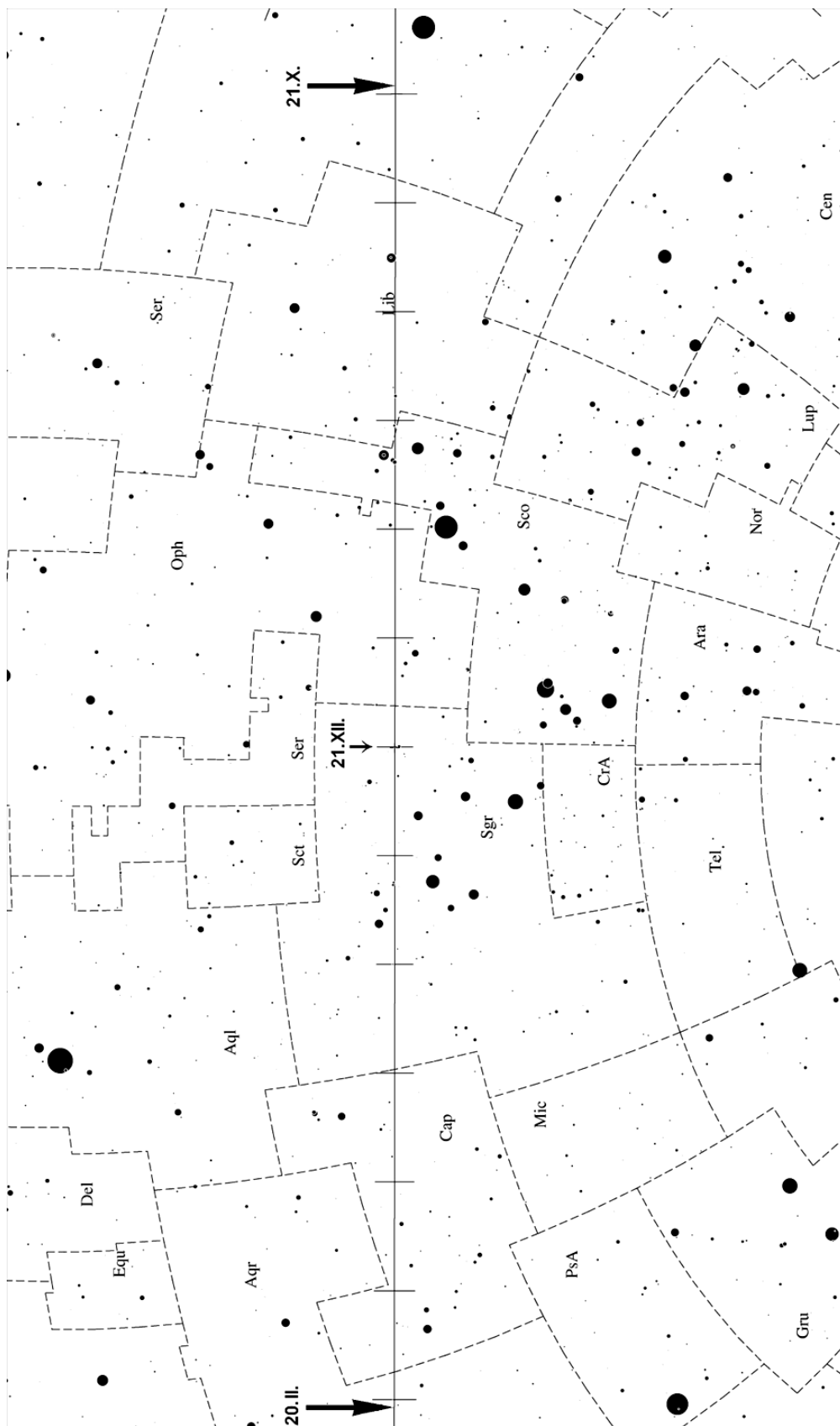
Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За определяне на положенията на Слънцето на 20 февруари и на 21 октомври – 2 т.

За определяне на съзвездията през които преминава Слънцето $6 \times 0.5 \text{ т.} = 3 \text{ т.}$

За правилен подход при пресмятането на датите на които Слънцето преминава границите на съзвездията – 4 т.

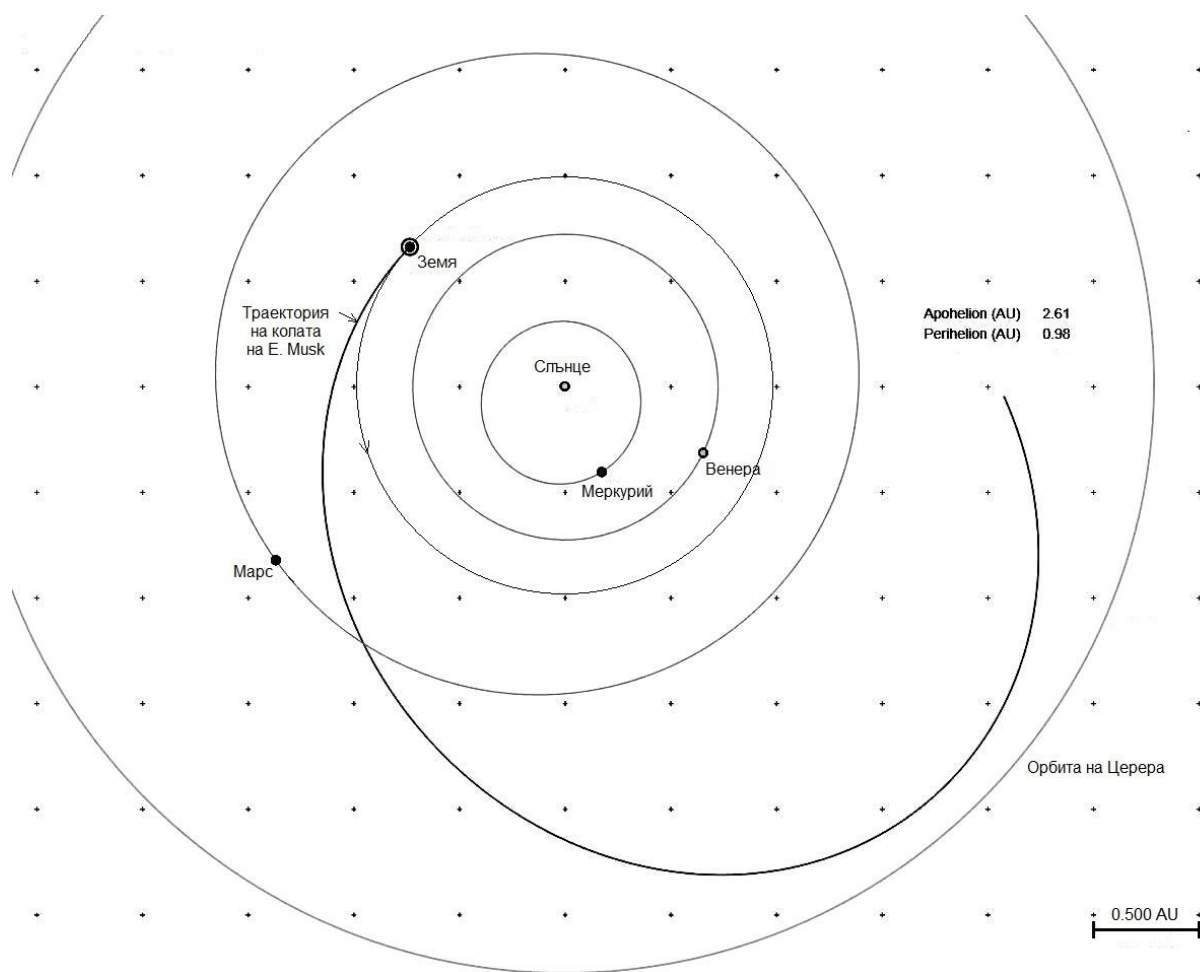
За правилно пресмятане на датите на които Слънцето пресича границите на съзвездията $6 \times 1 \text{ т.} = 6 \text{ т.}$ (Допустима е разлика от 1 денонощие.)



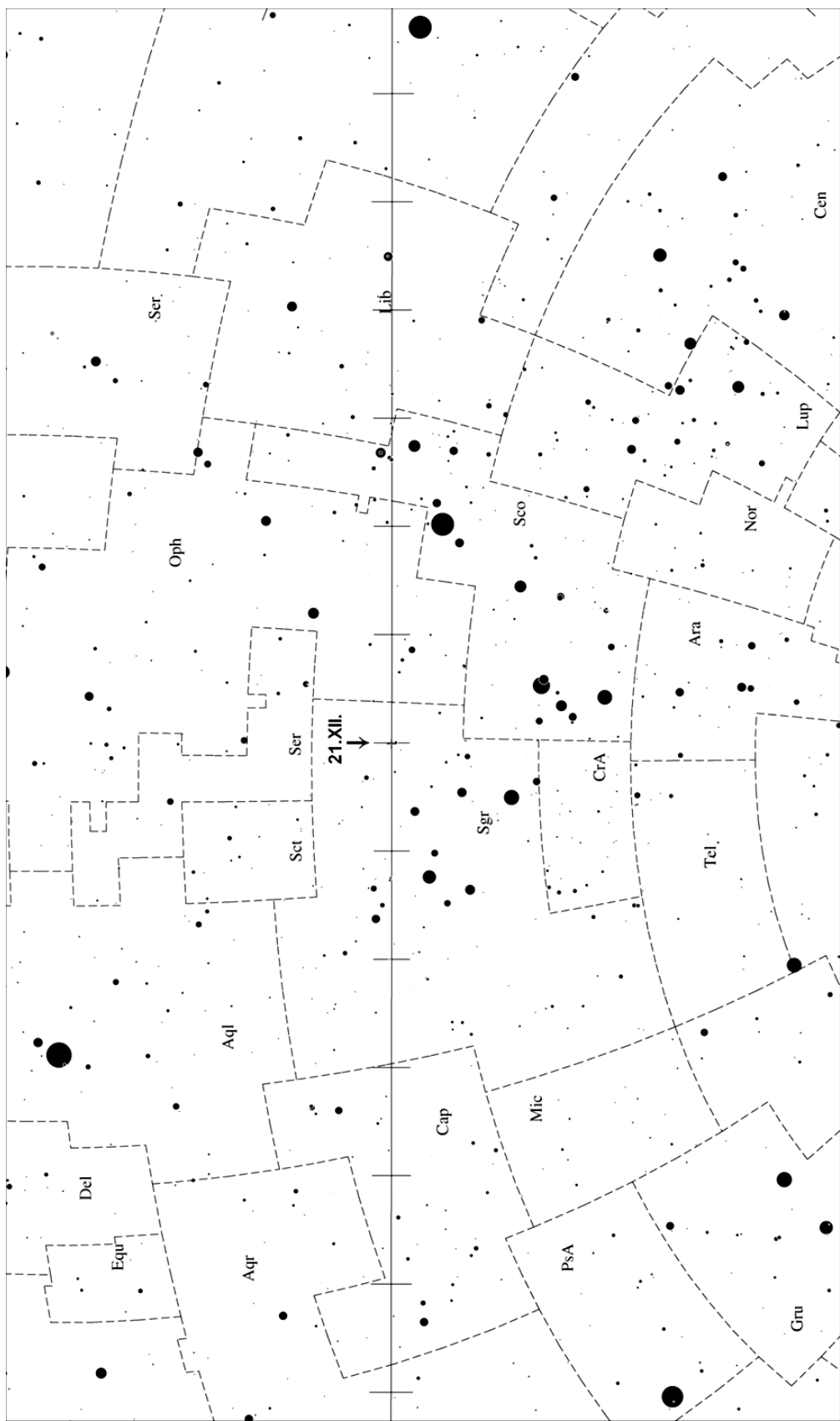
Фиг. 4б. Звездна карта с еклиптиката – към задача 4.(Решение)



Фиг. 1. Слънчев часовник - към 1 задача.



Фиг. 2. Орбита на автомобила на Elon Musk – към 2 задача.



Фиг. 3. Звездна карта с еклиптиката – към задача 4.